数　学

数　学

分数形で解答が求められているときは，既約分数で答えよ。符号は分子につけ，分母につけてはならない。

第１問　次の問いに答えよ。

(1)　$a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$a+\frac{1}{a}=\boxed{\text{ア}}$$

である。

　また，x に関する不等式

$$\left|x-\frac{1}{a}\right|\leqq a$$

を満たす整数は，全部で $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。

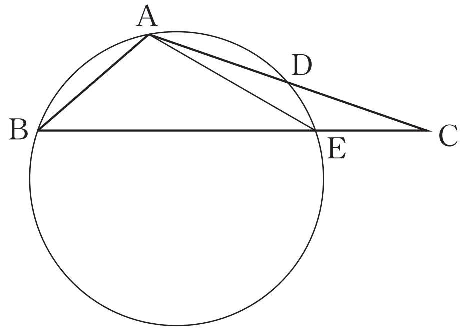
(2)　実数 x，y が，$x>0$，$y>0$，$x^2y=16$ を満たすとき，$\log_2 x$ と $\log_2 y$ の間に成り立つ関係式は

$$\log_2 y=\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\log_2 x$$

である。

　よって，$(\log_2 x)(\log_2 y)$ のとり得る値の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(3)　$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=120^\circ$ の $\triangle ABC$ において，辺 AC の中点を D とし，3 点 A，B，D を通る円と辺 BC の交点のうち，B でない方の点を E とする。



辺 BC，線分 EC の長さを求めることにより，

$$\frac{EC}{BC}=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

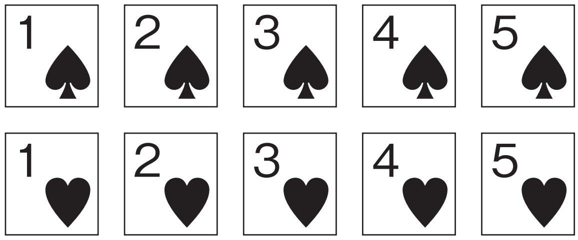
がわかるので，$\triangle AEC$ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(4)　a は定数とする。関数 $y=x^2(x-3)+a$ の極小値が -1 のとき，$a=\boxed{\text{コ}}$ である。

このとき，関数 $y=x^2(x-3)+a$ のグラフと直線 $y=-1$ で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

第２問　右の図のような，スペードとハートの合計 10 枚のカードがある。



⑴　10 枚のカードの中から 4 枚を取り出す。

(i)　4 枚とも同じマークである取り出し方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある。

(ii)　4 枚とも異なる数字である取り出し方は $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りある。

(iii)　4 枚のうち，最も大きい数字が 4 であるような取り出し方は $\boxed{\text{オカ}}$ 通りある。

⑵　10 枚のカードの中から 3 枚を取り出す。

(i)　取り出した 3 枚のカードがすべてハートである確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$，

取り出した 3 枚のカードの中にスペードの 1 が含まれている確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$

である。

(ii)　取り出した 3 枚の中にスペードのカードがあることがわかったとき，この 3 枚の中にスペードの 1 が含まれている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

第３問　a を定数とし，整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 - x^2 + ax + a + 2$$

とする。

(1)　$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = \left(x + \boxed{\text{ア}}\right)\left(x^2 - \boxed{\text{イ}}\,x + a + \boxed{\text{ウ}}\right)$$

となる。

したがって，方程式 $P(x) = 0$ は a の値にかかわらず，$\boxed{\text{エオ}}$ を解にもつ。

(2)　方程式 $P(x) = 0$ が異なる実数解を 3 個もつのは $a < \boxed{\text{カキ}}$，$\boxed{\text{クケ}} < a < \boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3)　方程式 $P(x) = 0$ が異なる実数解を 3 個もつとき，$\boxed{\text{エオ}}$ 以外の解を α，β とすると

$$\alpha\beta = a + \boxed{\text{シ}}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{スセ}}\,a$$

と表される。

(i)　k を定数とし，α^2，β^2 が 2 次方程式 $2x^2 - kx + 8 = 0$ の解であるとき

$$a = \boxed{\text{ソタ}},\quad k = \boxed{\text{チツ}}$$

である。

(ii)　$|\alpha| + |\beta| = 6$ のとき，$a = \boxed{\text{テトナ}}$ である。

（数学の問題は終わり）