数　学

数　学

分数形で解答が求められているときは，既約分数で答えよ。符号は分子につけ，分母につけてはならない。また，根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第1問　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $x^2+5x-1=0$ の正の解を a とすると，$a-\dfrac{1}{a}=$ $\boxed{\text{アイ}}$ であり，

$a^2+\dfrac{1}{a^2}=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2)　1 以上 20 以下の整数の中から異なる 2 つの数を選ぶ。

2 つの数の積が奇数になるような選び方は $\boxed{\text{オカ}}$ 通りある。

また，2 つの数の和が 5 の倍数になるような選び方は $\boxed{\text{キク}}$ 通りある。

(3) m を定数として，直線 $x-y+m=0$ を l とし，円 $x^2+y^2=8$ を C とする。

直線 l が円 C と共有点をもつような m の値の範囲は

$\boxed{\text{ケコ}} \leqq m \leqq \boxed{\text{サ}}$

である。

とくに，$m=2$ のとき，直線 l が円 C によって切り取られてできる線分の長さは $\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

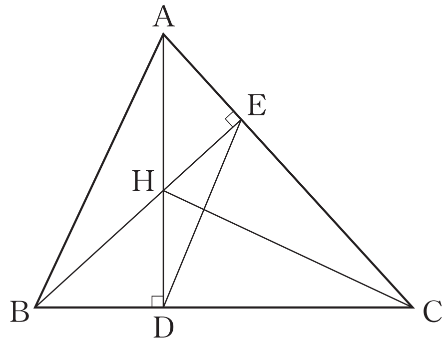
(4) 関数 $y=4^{x+1}-20\cdot 2^x+30$ の最小値は $\boxed{\text{セ}}$ であり，このときの x の値を小数第 2 位まで求めると $\boxed{\text{ソ}}.\boxed{\text{タチ}}$ である。

ただし，$\log_{10} 2=0.3010$，$\log_2 10=3.322$ とし，小数第 3 位以降は切り捨てて答えよ。

第２問　△ABC において，AB＝3，BC＝5，AC＝$2\sqrt{6}$ とする。頂点 A から辺 BC に垂線を引き，BC との交点を D とし，頂点 B から辺 AC に垂線を引き，AC との交点を E とする。

線分 AD と BE の交点を H とする。

ただし，右の図の辺の長さの比率は，正しいとは限らない。



(1)　cos ∠ABC＝$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，AD＝$\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　∠BAD と等しい角は，$\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ である。$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ には，次の①～⑤の中から正しいものを選べ。ただし，解答の順序は問わない。

①　∠ADE　　②　∠CBE　　③　∠BED
④　∠BCH　　⑤　∠ACH

(3)　図の中の相似な三角形に着目すると，DH＝$\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ とわかる。

また，△HBC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(4)　$\dfrac{(\triangle\text{AHE の面積})}{(\triangle\text{EDC の面積})}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

第３問 関数 $f(x)$ を，$f(x)=x^3-x$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする。

点 $(2,\ a)$ を通る C の接線が 2 本だけ存在するような，定数 a の値を求める。

曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,t^2-\boxed{\text{イ}}\right)x-\boxed{\text{ウ}}\,t^3$$

である。これが点 $(2,\ a)$ を通るとき

$$a=\boxed{\text{エオ}}\,t^3+\boxed{\text{カ}}\,t^2-\boxed{\text{キ}} \quad \cdots\cdots(\bigstar)$$

が成り立つ。

点 $(2,\ a)$ を通る C の接線が 2 本だけ存在するための必要十分条件は，t の方程式$(\bigstar)$ が異なる実数解を $\boxed{\text{ク}}$ 個だけもつことである。

そのような a の値を求めると

$$a=\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}$$

である。

$a=\boxed{\text{ケ}}$ のときの 2 本の接線のうち，傾きが小さい方の直線を l とする。

l の方程式は $y=\boxed{\text{シ}}\,x+\boxed{\text{ス}}$ であり，C と l で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

（数学の問題は終わり）