数　学

数　学

分数形で解答が求められているときは，既約分数で答えよ。符号は分子につけ，分母につけてはならない。また，根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第１問　次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，次の２つの不等式がある。

$|2x-1|<3$　　　……①

$x^2+ax-6<0$　……②

①の解は，$\boxed{\text{アイ}}<x<\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，②の解が①の解を含むような a の値の範囲は $\boxed{\text{エオ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　５本のくじの中に当たりくじが２本入っている。

Ａ，Ｂの２人がこの順に，Ａは１本，Ｂは２本のくじを引く。ただし，１度引いたくじは元に戻さない。

Ｂが２本ともはずれのくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

また，Ｂが２本ともはずれのくじを引いたとき，Ａが当たりくじを引いている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(3) k を定数とし，方程式 $x^3-kx^2-6x+18=0$ ……(＊) を考える。

$k=1$ のとき，(＊)の解は

$$x=\boxed{\text{シス}},\ \boxed{\text{セ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,i$$

である。ただし，i は虚数単位とする。

また，(＊)の 3 つの解を α，β，γ とすると，$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=10$ が成り立つ。

このとき，k の値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $y=x^3-2x$ のグラフを C とする。

C 上の x 座標が t である点における，この曲線の接線を l とすると，l の方程式は

$$y=(\boxed{\text{チ}}\,t^2-\boxed{\text{ツ}})x-\boxed{\text{テ}}\,t^3$$

と表される。

$0<t<1$ とし，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，C と l および 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\boxed{\text{ト}}\,t^3-\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}t^2+\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

である。

したがって，$0<t<1$ の範囲における S の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第２問

〔１〕　自然数 n は，次の条件(★)を満たす。

> (★)
> n は 9 の倍数であり，かつ，$n+1$ は 7 の倍数である。

このような自然数 n を求めよう。

(★)は，$n=9x$ かつ $n+1=7y$ を満たす自然数 x，y が存在することと同値である。

そこで，等式 $9x=7y-1$ を満たす自然数 x，y のうち，x の値が最小であるものを求めると

$$x=\boxed{\text{ア}},\quad y=\boxed{\text{イ}}$$

であるから，$9x=7y-1$ は

$$\boxed{\text{ウ}}(x-\boxed{\text{ア}})=\boxed{\text{エ}}(y-\boxed{\text{イ}})$$

と変形できる。これを利用すると，(★)を満たす自然数 n は

$$n=\boxed{\text{オカ}}k+\boxed{\text{キク}}\quad (k\text{ は 0 以上の整数})$$

と表される。

したがって，(★)を満たす自然数 n のうち，3 桁(けた)で最小のものは $\boxed{\text{ケコサ}}$ である。

〔２〕　$\dfrac{100}{27}$ を小数で表すと，同じ並びが繰り返し続く循環小数となる。

この小数において，小数第 100 位の数字は $\boxed{\text{シ}}$ である。

また，100 を 3 の累乗の和の形で表すと

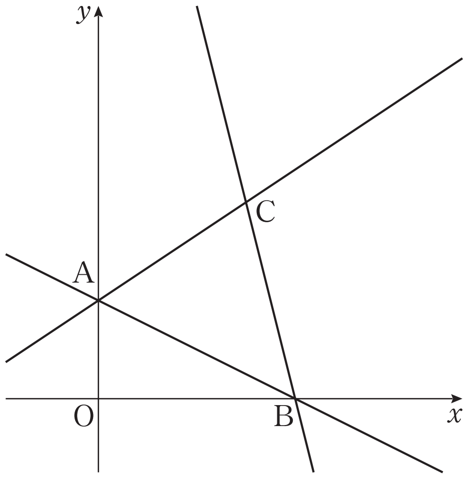
$$100=3^4+\boxed{\text{ス}}\times 3^3+\boxed{\text{セ}}\times 3^2+\boxed{\text{ソ}}\times 3^1+\boxed{\text{タ}}$$

となる。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ には 0，1，2 のいずれかの数をそれぞれ入れよ。

したがって，$\dfrac{100}{27}$ を 3 進法で表すと $\boxed{\text{チツ}}.\boxed{\text{テトナ}}_{(3)}$ となる。

第３問　3 直線 $x+2y-4=0$，$2x-3y+6=0$，$4x+y-16=0$ によってできる三角形の頂点を，右の図のように A，B，C とする。



(1)　3 点 A，B，C の座標は

A$(0,$ $\boxed{\text{ア}}$)，B($\boxed{\text{イ}}$ $, 0)$，

C($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$)

である。

(2)　$\text{AB}=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である。

次に，△ABC の周および内部を表す領域を D とする。

(3)　点 $(X,\ Y)$ が領域 D を動くとき

$2X+3Y$ の最大値は $\boxed{\text{クケ}}$，最小値は $\boxed{\text{コ}}$

である。

(4)　原点を中心とし，半径が r の円を S とする。

円 S が領域 D と共有点をもつような r の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}} \leqq r \leqq \boxed{\text{セ}}$

である。

（数学の問題は終わり）