

数 学

数 学

分数形で解答が求められているときは、既約分数で答えよ。符号は分子につけ、分母につけてはならない。また、根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第1問 次の問いに答えよ。

- (1) 実数 x, y に関する条件 p, q を次のように定める。

$$p: (x-y)^2 = x^2 + y^2$$

$$q: (x+y)^2 > 2xy$$

このとき、 p と同値な条件は ア である。

また、 p の否定を $\overline{p}$ と表すとき

$\overline{p}$ は q であるための イ。

ア，イ に当てはまるものを、次の各解答群の中から1つずつ選び、その番号をそれぞれ答えよ。

ア の解答群

- | | |
|---------------|-------------------|
| ① $x = y$ | ② $xy = 0$ |
| ③ $x + y = 0$ | ④ $x^2 + y^2 = 0$ |

イ の解答群

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件であるが十分条件ではない
- ③ 十分条件であるが必要条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

- (2) 実数 x, y は $x^2 y^3 = 64$, $x \geq 1$, $y \geq 1$ を満たす。

このとき, $T = (\log_2 x)(\log_2 y)$ のとり得る値の範囲を求める。

まず, $x^2 y^3 = 64$ を底が 2 の対数の式で表すと

$$\boxed{\text{ウ}} \log_2 x + \boxed{\text{エ}} \log_2 y = \boxed{\text{オ}}$$

となる。

したがって, T のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{カ}} \leq T \leq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

- (3) 座標平面上に, 原点を中心とする半径 1 の円 C と, 点 $(4, 3)$ を中心とする半径 r の円 D がある。ただし, $r > 0$ とする。

2 円 C, D が共有点をもつような r の値の範囲は $\boxed{\text{ケ}} \leq r \leq \boxed{\text{コ}}$ である。

$r = \boxed{\text{ケ}}$ のとき, 2 円 C, D は共有点をただ 1 つもち, この点において共通な接線をもつ。この接線の方程式は $\boxed{\text{サ}}x + \boxed{\text{シ}}y = \boxed{\text{ス}}$ である。

- (4) 自然数 m, n に対して

$$7m + 3n, \quad m + 2n$$

の 2 数を考え, これらの最大公約数を d とする。

m, n が互いに素であるならば, $d = \boxed{\text{セ}}$ または $d = \boxed{\text{ソタ}}$ である。

以下, $n = 1$ とする。

2 数 $7m + 3$, $m + 2$ の最大公約数が $\boxed{\text{ソタ}}$ となるような m の値を, 小さい方から

2 つ求めると, $\boxed{\text{チ}}$ および $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

第2問 $\triangle ABC$ において, $AB=8$, $AC=9$, $\cos \angle BAC = \frac{2}{3}$ とする。

(1) $BC = \boxed{\text{ア}}$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{イウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

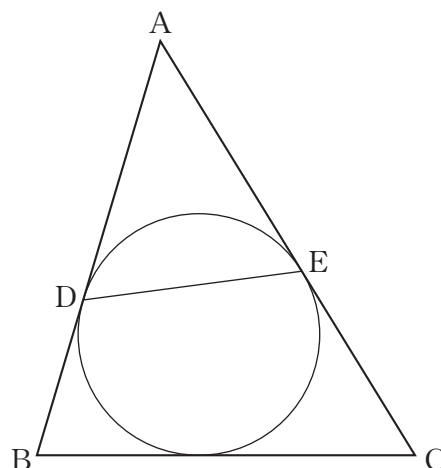
また, この円と 2 辺 AB , AC との接点をそれぞれ D , E とすると

$$AD = AE = \boxed{\text{カ}}$$

であるから,

$$DE = \frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。



次に, (2)のとき, 内接円の周上に, 点 D , E とは一致しない点 P をとる。

(3) $\sin \angle DPE$ は点 P の位置に関わらず一定の値をとり, その値は

$$\sin \angle DPE = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

(4) 点 P が線分 CD 上にあるとき

$$CP = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

である。

第3問 関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ において、 $y = f(x)$ のグラフを C とする。

(1) $f(x)$ の導関数や増減について正しいことがらは、ア と イ である。

ア，イ に当てはまるものを、次の①～⑤の中から2つ選び、その番号を答えよ。ただし、解答の順序は問わない。

- ① $f'(x) = 0$ は実数解をもつ。
- ② $f'(x) = 0$ は実数解をもたない。
- ③ $f(x)$ は常に増加する。
- ④ $f(x)$ は常に減少する。
- ⑤ $f(x)$ は、増加する区間と減少する区間がある。

(2) 原点から曲線 C に引いた接線の方程式は、 $y = \text{ウ}x$ である。

(3) k を正の定数とし、放物線 $y = x^2 + 4x + k$ を D とする。

2 曲線 C ， D の共有点の個数は、方程式 $2x^3 + \text{エ}x^2 - \text{オ}x - \text{カ} = k$ の異なる実数解の個数に等しい。

すなわち、2 曲線 C ， D の共有点の個数は

$0 < k < \text{キ}$ のとき、ク 個

$k = \text{キ}$ のとき、ケ 個

キ $< k$ のとき、コ 個

となる。

$k = \text{キ}$ のとき、2 曲線 C ， D で囲まれた図形の面積は $\frac{\text{サ}}{\text{シ}}$ である。

(数学の問題は終わり)