数　学

数　学

分数形で解答が求められているときは，既約分数で答えよ。符号は分子につけ，分母につけてはならない。また，根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第１問　次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，次の２つの不等式がある。

$$|2x-1|<3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$x^2+ax-6<0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①の解は，$\boxed{\text{アイ}}<x<\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，②の解が①の解を含むような a の値の範囲は $\boxed{\text{エオ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　５本のくじの中に当たりくじが２本入っている。

Ａ，Ｂの２人がこの順に，Ａは１本，Ｂは２本のくじを引く。ただし，１度引いたくじは元に戻さない。

Ｂが２本ともはずれのくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

また，Ｂが２本ともはずれのくじを引いたとき，Ａが当たりくじを引いている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(3)　k を定数とし，方程式 $x^3-kx^2-6x+18=0$　……(＊) を考える。

$k=1$ のとき，(＊)の解は

$$x=\boxed{\text{シス}},\ \boxed{\text{セ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,i$$

である。ただし，i は虚数単位とする。

また，(＊)の 3 つの解を α，β，γ とすると，$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=10$ が成り立つ。

このとき，k の値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4)　$y=x^3-2x$ のグラフを C とする。

C 上の x 座標が t である点における，この曲線の接線を l とすると，l の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{チ}}\,t^2-\boxed{\text{ツ}}\right)x-\boxed{\text{テ}}\,t^3$$

と表される。

$0<t<1$ とし，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，C と l および 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\boxed{\text{ト}}\,t^3-\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}t^2+\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

である。

したがって，$0<t<1$ の範囲における S の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第２問

〔１〕 次の条件（★）を満たす自然数 n を調べる。

> （★）
> $\sqrt{150n}$ が自然数であり，かつ，7 で割ると 1 余る数である。

まず，$\sqrt{150n}$ が自然数となるとき，n はある自然数 k を用いて，$\boxed{\text{ア}}$ と表される数である。

$\boxed{\text{ア}}$ には，次の①～④のうち適するものを 1 つ選べ。

① $n = 6k$　　② $n = 6k^2$
③ $n = 24k^2$　　④ $n = 150k^2$

n が $\boxed{\text{ア}}$ と表されるとき，$\sqrt{150n} = \boxed{\text{イウ}}\,k$ である。

次に，$\boxed{\text{イウ}}\,k$ が 7 で割ると 1 余る数になるための条件を考える。

1 次方程式 $\boxed{\text{イウ}}\,k = 7l + 1$ の整数解 $(k,\ l)$ のうち，k が最小の自然数であるものは

$$k = \boxed{\text{エ}},\quad l = \boxed{\text{オカ}}$$

である。

したがって，（★）を満たす自然数 n のうち，最小のものは $\boxed{\text{キク}}$ である。

〔２〕 6 進法で表された小数 $0.213_{(6)}$ を 10 進法で表すと，$0.\boxed{\text{ケコサ}}$ となり，これは有限小数である。このように 6 進法で表された小数第 3 位までの小数については，10 進法で表したときに有限小数になるものが，$0.213_{(6)}$ 以外にもある。これを求めよう。

6 進法で表された小数 $0.abc_{(6)}$ を 10 進法で表すと

$$0.abc_{(6)} = \frac{\boxed{\text{シス}}\,a + \boxed{\text{セ}}\,b + c}{6^3} \quad (a,\ b,\ c \text{ は } 0 \text{ 以上 } 5 \text{ 以下の整数，} c \neq 0)$$

これが有限小数になる a，b，c を求めると，次の 3 つが得られる。

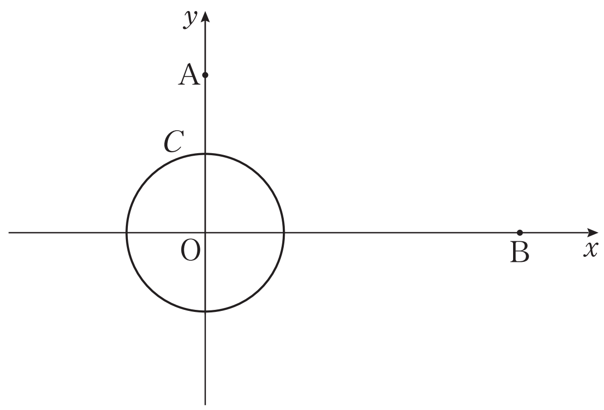
$0.043_{(6)}$　　$0.3\boxed{\text{ソタ}}_{(6)}$　　$0.5\boxed{\text{チツ}}_{(6)}$

第３問　座標平面上に，

2 点 A(0，2)，B(4，0)，

および，円 C：$x^2+y^2=1$

がある。



⑴　円 C の接線のうち，直線 AB に平行で，接点が第 3 象限の点 C であるものの方程式は

$x+\boxed{\text{ア}}\,y+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}=0$ である。

また，△ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

⑵　不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ x+y \leqq 0 \end{cases}$ で表される領域を D とし，点 P$(X,\ Y)$ がこの領域 D 内を動くとする。

$T=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ として，T のとり得る最大値，最小値について調べる。

T を X，Y を用いた式で表すと

$$T=2X^2+2Y^2-\boxed{\text{オ}}\,X-\boxed{\text{カ}}\,Y+\boxed{\text{キク}}$$

$$=2(X-\boxed{\text{ケ}})^2+2(Y-\boxed{\text{コ}})^2+\boxed{\text{サシ}}$$

となる。

したがって，T が最小になるのは $X=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$Y=-\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のときで，

T の最小値は $\boxed{\text{チツ}}$ である。

また，T の最大値は $\boxed{\text{テト}}+\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

（数学の問題は終わり）