数　学

数　学

分数形で解答が求められているときは，既約分数で答えよ。符号は分子につけ，分母につけてはならない。また，根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第１問　次の問いに答えよ。

(1)　実数 x，y に関する条件 p，q を次のように定める。

$$p : (x-y)^2 = x^2 + y^2$$

$$q : (x+y)^2 > 2xy$$

このとき，p と同値な条件は $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，p の否定を $\overline{p}$ と表すとき

$\overline{p}$ は q であるための $\boxed{\text{イ}}$。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の各解答群の中から１つずつ選び，その番号をそれぞれ答えよ。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

①　$x = y$　　　　②　$xy = 0$

③　$x + y = 0$　　　　④　$x^2 + y^2 = 0$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

①　必要十分条件である

②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

(2)　実数 x，y は $x^2y^3=64$，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ を満たす。

このとき，$T=(\log_2 x)(\log_2 y)$ のとり得る値の範囲を求める。

まず，$x^2y^3=64$ を底が 2 の対数の式で表すと

$$\boxed{\text{ウ}}\log_2 x+\boxed{\text{エ}}\log_2 y=\boxed{\text{オ}}$$

となる。

したがって，T のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{カ}} \leqq T \leqq \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3)　座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円 C と，点 $(4,\ 3)$ を中心とする半径 r の円 D がある。ただし，$r>0$ とする。

2 円 C，D が共有点をもつような r の値の範囲は $\boxed{\text{ケ}} \leqq r \leqq \boxed{\text{コ}}$ である。

$r=\boxed{\text{ケ}}$ のとき，2 円 C，D は共有点をただ 1 つもち，この点において共通な接線をもつ。この接線の方程式は $\boxed{\text{サ}}x+\boxed{\text{シ}}y=\boxed{\text{ス}}$ である。

(4)　自然数 m，n に対して

$$7m+3n,\qquad m+2n$$

の 2 数を考え，これらの最大公約数を d とする。

m，n が互いに素であるならば，$d=\boxed{\text{セ}}$ または $d=\boxed{\text{ソタ}}$ である。

以下，$n=1$ とする。

2 数 $7m+3$，$m+2$ の最大公約数が $\boxed{\text{ソタ}}$ となるような m の値を，小さい方から 2 つ求めると，$\boxed{\text{チ}}$ および $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

第２問　△ABC において，AB＝8，AC＝9，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{3}$ とする。

(1)　BC＝$\boxed{\text{ア}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{イウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　△ABC の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

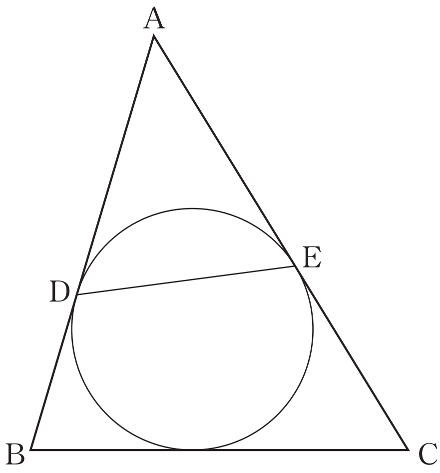
また，この円と 2 辺 AB，AC との接点をそれぞれ D，E とすると

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=\boxed{\text{カ}}$$

であるから，

$$\mathrm{DE}=\frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。



次に，(2)のとき，内接円の周上に，点 D，E とは一致しない点 P をとる。

(3)　sin ∠DPE は点 P の位置に関わらず一定の値をとり，その値は

$$\sin\angle\mathrm{DPE}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

(4)　点 P が線分 CD 上にあるとき

$$\mathrm{CP}=\frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

である。

第３問　関数 $f(x)=2x^3+3x^2+2x-1$ において，$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1)　$f(x)$ の導関数や増減について正しいことがらは，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の①～⑤の中から 2 つ選び，その番号を答えよ。ただし，解答の順序は問わない。

①　$f'(x)=0$ は実数解をもつ。
②　$f'(x)=0$ は実数解をもたない。
③　$f(x)$ は常に増加する。
④　$f(x)$ は常に減少する。
⑤　$f(x)$ は，増加する区間と減少する区間がある。

(2)　原点から曲線 C に引いた接線の方程式は，$y=\boxed{\text{ウ}}x$ である。

(3)　k を正の定数とし，放物線 $y=x^2+4x+k$ を D とする。

2 曲線 C，D の共有点の個数は，方程式 $2x^3+\boxed{\text{エ}}x^2-\boxed{\text{オ}}x-\boxed{\text{カ}}=k$ の異なる実数解の個数に等しい。

すなわち，2 曲線 C，D の共有点の個数は

$0<k<\boxed{\text{キ}}$ のとき，$\boxed{\text{ク}}$ 個

$k=\boxed{\text{キ}}$ のとき，$\boxed{\text{ケ}}$ 個

$\boxed{\text{キ}}<k$ のとき，$\boxed{\text{コ}}$ 個

となる。

$k=\boxed{\text{キ}}$ のとき，2 曲線 C，D で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

（数学の問題は終わり）