数　学

数　学

分数形で解答が求められているときは，既約分数で答えよ。符号は分子につけ，分母につけてはならない。また，根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第１問　次の問いに答えよ。

(1)　実数 x，y に関する条件 p，q を次のように定める。

$p:|x-y|>2$

$q:x^2+y^2<2$

このとき，p と同値な条件は $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，p の否定を $\overline{p}$ と表すとき

$\overline{p}$ は q であるための $\boxed{\text{イ}}$。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の各解答群の中から１つずつ選び，その番号をそれぞれ答えよ。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① $x-2<y<x+2$　　② $y<x-2$ かつ $y>x+2$

③ $y<x-2$ または $y>x+2$　　④ $y<-x-2$ または $y>-x+2$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが十分条件ではない

③ 十分条件であるが必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 300 と 252 の最大公約数を d とすると，$d=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

また，$300x-252y=d$ を満たす整数 x，y の組のうち，x が正の整数で最小であるものを求めると

$$x=\boxed{\text{オカ}},\quad y=\boxed{\text{キク}}$$

である。

(3) 座標平面上で，点 P$(x,\ y)$ が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$T=3x^2+4xy$ のとり得る値の範囲を求める。

点 P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$（ただし，$0\leqq\theta<2\pi$）とすると

$$T=\frac{1}{2}\left(\boxed{\text{ケ}}\sin 2\theta+\boxed{\text{コ}}\cos 2\theta+\boxed{\text{サ}}\right)$$

となるから，T のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{シス}}\leqq T\leqq\boxed{\text{セ}}$$

である。

(4) $A=15^{60}$ とし，A の桁数と最高位の数字を求める。

$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ とすると

$$\log_{10}A=\boxed{\text{ソタ}}.\boxed{\text{チツ}}$$

である。また

$$n\times 10^{\boxed{\text{ソタ}}}<A<(n+1)\times 10^{\boxed{\text{ソタ}}}$$

を満たす 1 桁の自然数 n の値は $\boxed{\text{テ}}$ である。

よって，A の桁数は $\boxed{\text{トナ}}$，最高位の数字は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

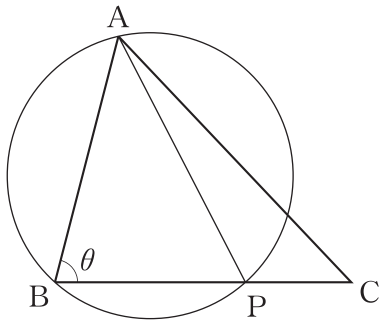
第２問　△ABC において，AB＝6，BC＝7，CA＝8 である。辺 BC 上に点 P をとる。ただし，点 P は頂点 B，C には一致しない。次の問いに答えよ。

(1)　∠ABC＝θ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　△ABP の外接円の半径を R とする。

R と線分 AP の長さの関係は，$R = \boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の①～④の中から１つ選び，その番号を答えよ。



①　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\sin\theta}$　　②　$\dfrac{\mathrm{AP}}{2\sin\theta}$

③　$\mathrm{AP}\cdot\sin\theta$　　④　$\dfrac{2\sin\theta}{\mathrm{AP}}$

したがって，R のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}} \leqq R < \frac{\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。

(3)　点 P を，AP が ∠BAC の二等分線となるようにとる。

このとき，BP＝$\boxed{\text{サ}}$，AP＝$\boxed{\text{シ}}$ である。

また，△ABP，△ACP の内接円の半径をそれぞれ r_1，r_2 とするとき

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

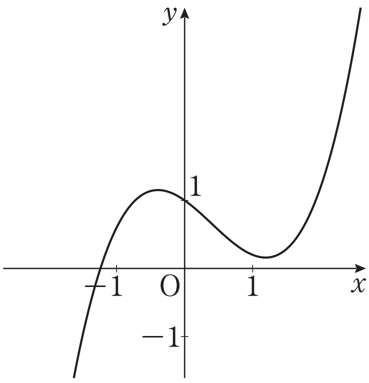
である。

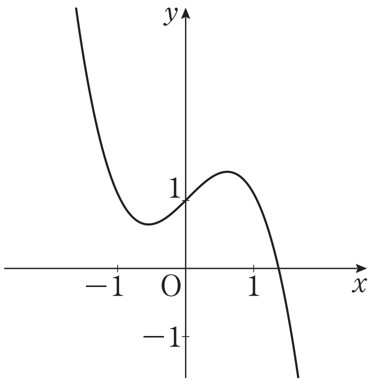
第３問　関数 $f(x)$ を $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 1$ とし，$y = f(x)$ のグラフを C とする。
次の問いに答えよ。

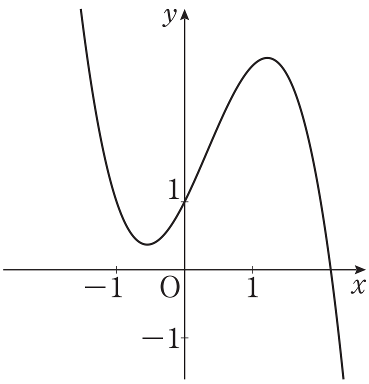
(1)　$f'(x) = 0$ となる x の値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}} \pm \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

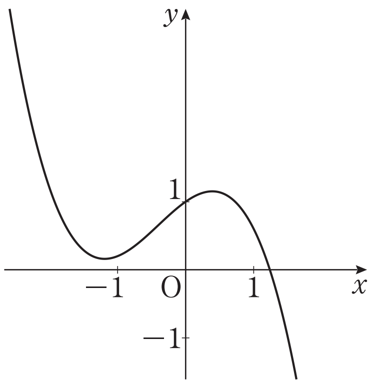
また，C の概形として正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の①〜④の中から 1 つ選び，その番号を答えよ。

①


②


③


④


(2)　方程式 $f(x) = 2$ の異なる実数解の個数について調べると

正の解は $\boxed{\text{オ}}$ 個

負の解は $\boxed{\text{カ}}$ 個

である。

(3)　C と直線 $y=x+1$ の交点の x 座標のうち，最小のものを α，最大のものを β とすると

$$\alpha+\beta=\boxed{\text{キ}},\quad \alpha\beta=\boxed{\text{クケ}}$$

であり，

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{コ}}$$

$$\alpha^3+\beta^3=\boxed{\text{サ}}$$

である。

また，C と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分は 2 つあり，これらの面積の和は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$

である。

（数学の問題は終わり）