

数 学

数 学

分数形で解答が求められているときは、既約分数で答えよ。符号は分子につけ、分母につけてはならない。また、根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第1問 次の問いに答えよ。

(1) $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$x^2 + y^2 = \boxed{\text{ア}}$$

であり

$$(x+2y-1)(2x+y-1) = \boxed{\text{イウ}} - \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(2) $\triangle ABC$ において、 $AB=5$, $AC=8$, $\angle A=60^\circ$ である。

この三角形の

外接円の半径は $\boxed{\text{カ}}$

内接円の半径は $\boxed{\text{キ}}$

である。

$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑧の中から1つずつ選び、その番号をそれぞれ答えよ。

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{3}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

⑥ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

⑦ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

⑧ $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

- (3) 赤玉 5 個, 白玉 2 個が入った袋の中から, A, B の 2 人がこの順で玉を取り出す。
まず, A が玉を 1 個取り出し, それを袋に戻さずに B が玉を 2 個取り出す。

このとき, B の取り出した玉が赤玉 2 個である確率は $\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

また, B の取り出した玉が赤玉 2 個であるとき, A の取り出した玉が白玉である条件付き確率は $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

- (4) 実数 x, y が $x^2y = 64, x \geq 1, y \geq 1$ を満たすとする。

このとき, $z = (\log_2 x)^2(\log_2 y)$ として, z のとり得る値を調べる。

$\log_2 x = t$ とおくと, t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} \leq t \leq \boxed{\text{ソ}}$$

であり

$$z = \boxed{\text{タチ}} t^3 + \boxed{\text{ツ}} t^2$$

と表される。

したがって, z の

$$\text{最大値は } \boxed{\text{テ}}$$

$$\text{最小値は } \boxed{\text{ト}}$$

である。

第2問 次の問いに答えよ。

- (1) 57 と 350 について

$$350 = 57 \times 6 + \boxed{\text{ア}}$$

$$57 = \boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}} + 1$$

であるから、57 と 350 の最大公約数は 1 である。

この結果を利用すると

$$57 \times \boxed{\text{ウエ}} - 350 \times \boxed{\text{オ}} = 1$$

が得られるから、方程式 $57x - 350y = 1$ の整数解の 1 つは

$$x = \boxed{\text{ウエ}}, y = \boxed{\text{オ}}$$

である。

- (2) 2250 の正の約数は全部で $\boxed{\text{カキ}}$ 個ある。

これらのうち

$$3 \text{ の倍数は } \boxed{\text{クケ}} \text{ 個}$$

$$9 \text{ の倍数は } \boxed{\text{コ}} \text{ 個}$$

だけある。

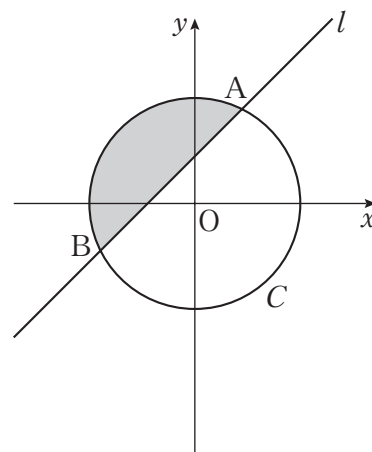
次に、 $3^{\boxed{\text{サ}}} < 2250 < 3^{\boxed{\text{サ}}+1}$ であるから、2250 を 3 進法で表すと $\boxed{\text{シ}}$ 桁の数となる。

また、2250 のすべての正の約数の積を T として、 T を 3 進法で表すと、末尾に 0 が連続して $\boxed{\text{スセ}}$ 個並ぶ。

第3問 原点を O とする座標平面上に直線 $l: y = x + 1$

および円 $C: x^2 + y^2 = 5$ があり、 l と C の交点のうち、 x 座標が正である方を A 、負である方を B とする。

また、右の図のように、 l と C で囲まれた影のついた領域を D とする。ただし、 D には境界線も含む。次の問いに答えよ。



(1) 領域 D を表す不等式は

$$\begin{cases} y \boxed{\text{ア}} x + 1 \\ x^2 + y^2 \boxed{\text{イ}} 5 \end{cases}$$

である。

$\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを、次の①～④の中から 1 つずつ選び、その番号をそれぞれ答えよ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① $>$ ② $\geq$ ③ $<$ ④ $\leq$

(2) 3 点 O 、 A 、 B を通る円の方程式は

$$x^2 + y^2 + \boxed{\text{ウ}}x - \boxed{\text{エ}}y = 0$$

である。

(3) m を正の定数とし、傾きが m で y 軸上の切片が k の直線を考える。

この直線が点 A を通るとき

$$k = \boxed{\text{オ}} m + \boxed{\text{カ}}$$

この直線が円 C と接するとき

$$k^2 = \boxed{\text{キ}} m^2 + \boxed{\text{ク}}$$

である。

したがって、 m を正の定数とし、領域 D にある点 (X, Y) について、 $Y - mX$ のとり得る値を調べると、最大値は $\sqrt{\boxed{\text{ケ}} m^2 + \boxed{\text{コ}}}$ であり、最小値は次のようになる。

$$0 < m < \boxed{\text{サ}} \text{ のとき } \boxed{\text{シ}} m - \boxed{\text{ス}}$$

$$m = \boxed{\text{サ}} \text{ のとき } \boxed{\text{セ}}$$

$$\boxed{\text{サ}} < m \text{ のとき } \boxed{\text{ソ}} m + \boxed{\text{タ}}$$

(数学の問題は終わり)