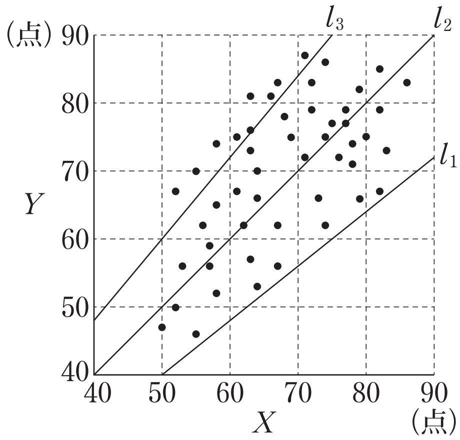
数　学

数　学

分数形で解答が求められているときは，既約分数で答えよ。符号は分子につけ，分母につけてはならない。また，根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

第１問　次の問いに答えよ。

(1)　右の図は，高校３年生 50 人に国語のテストを２回行ったときの得点の結果を，１回目の得点を X，２回目の得点を Y として，散布図に表したものである。



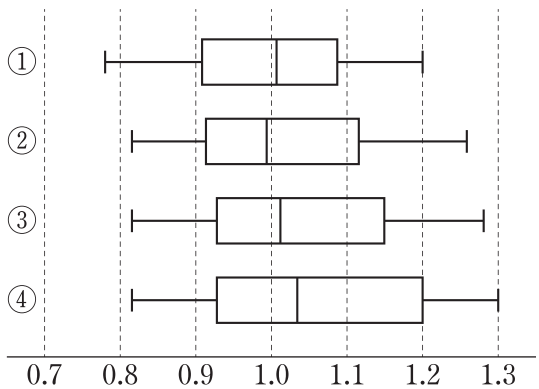
この散布図から，２回のテストがともに 70 点以上であった生徒は $\boxed{\text{アイ}}$ 人いることがわかる。

また，散布図にかき入れている３本の直線 l_1，l_2，l_3 は，横軸を x 軸，縦軸を y 軸としてこの散布図を座標平面とみたとき，原点 $(0,\ 0)$ を通り，傾きがそれぞれ 0.8，1，1.2 の直線を表している。

いま，$\dfrac{Y}{X}$ の値を変量 Z とするとき，Z の箱ひげ図として最も適切であるものは

$\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，右の図の①～④の中から１つ選び，その番号を答えよ。



(2)　a を定数とし，関数 $y=x^2-ax+a-3$ のグラフを C とする。

(i)　C の頂点が直線 $y=x-5$ 上にあるとき，$a=$ $\boxed{\text{エオ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ である。

(ii)　C が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で x 軸より下方にあるような a の値の範囲は，

$\boxed{\text{キ}} < a < \boxed{\text{ク}}$ である。

(3)　座標平面上に 2 点 A(0, 2)，B(4, 0) および点 P(X, Y) があり，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=12$ を満たしている。このとき，点 P の軌跡は

点 ($\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$) を中心とする半径 $\boxed{\text{サ}}$ の円

である。

また，点 P の座標 (X, Y) において，$3X-4Y$ のとり得る値の最大値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(4)　t を $0<t<2$ を満たす定数とする。放物線 $y=x(x-t)$ と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とすると

$$S=\frac{1}{\boxed{\text{ス}}}\left(t^3-\boxed{\text{セ}}\,t+\boxed{\text{ソ}}\right)$$

である。

S を t の関数とみると，S は $t=\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{チ}}-\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ をとる。

第２問　赤玉 2 個，青玉 3 個，白玉 4 個，合計 9 個の玉がある。次の問いに答えよ。

(1)　この 9 個の玉を横 1 列に並べる。同じ色の玉は区別しないものとするとき，異なる並べ方は全部で $\boxed{\text{アイウエ}}$ 通りある。

このうち，青玉 3 個がいずれも隣り合わないような並べ方は $\boxed{\text{オカキ}}$ 通りある。

(2)　袋と箱を 1 つずつ用意し，この 9 個の玉を，袋または箱のいずれかに入れる。同じ色の玉は区別しないものとし，袋にも箱にも玉を 1 個以上入れるものとすると，異なる玉の入れ方は $\boxed{\text{クケ}}$ 通りある。

(3)　事象 X が起こる確率を $P(X)$，事象 X が起こったときの事象 Y が起こる条件付き確率を $P_X(Y)$ と表すとする。

9 個の玉を 1 つの袋に入れ，この中から玉を 3 個同時に取り出す。このとき，取り出した 3 個の玉の中に赤玉が含まれているという事象を A，取り出した 3 個の玉の中に白玉が 2 個だけ含まれているという事象を B とすると

$$P(A) = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}},\quad P_A(B) = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

である。

また，$P_A(B)$ と $P_B(A)$ の大小関係は

$$P_A(B)\ \boxed{\text{チ}}\ P_B(A)$$

である。

$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の①～③の中から 1 つ選び，その番号を答えよ。

①　＞　　　　②　＜　　　　③　＝

第３問　a，b を実数として，x の 3 次式 $f(x)$ を，$f(x)=x^3+ax^2+bx+20$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=-10$，$b=6$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解は

$$x=\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が実数解 -5 と 2 つの虚数解 α，β をもつとする。

(i)　$b=5a-\boxed{\text{オカ}}$ であり

$$f(x)=(x+5)\{x^2+(a-\boxed{\text{キ}})x+\boxed{\text{ク}}\}$$

と表される。

したがって，$f(x)=0$ が 2 つの虚数解をもつような a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}}<a<\boxed{\text{コ}}$$

である。

(ii)　α，β が $\alpha^2+\beta^2=2(\alpha+\beta)$ を満たすとき

$$a=\boxed{\text{サ}},\ b=\boxed{\text{シス}}$$

である。

このとき

$$\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=\boxed{\text{セソタ}}\pm\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\,i$$

である。ただし，i は虚数単位とする。

（数学の問題は終わり）