

数 学

数 学

分数形で解答が求められているときは、既約分数で答えよ。符号は分子につけ、分母につけてはならない。また、根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

第1問 次の問いに答えよ。

- (1) a を定数とし、2 次関数 $y = x^2 - ax + 2a$ のグラフを C とする。

C の頂点が直線 $y = 5x - 2$ 上にあるとき

$$a = \boxed{\text{ア}} \quad \text{または} \quad a = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

$a = \boxed{\text{ア}}$ のときのグラフ C を C_1 とし、 $a = \boxed{\text{イウ}}$ のときのグラフ C を C_2 とする。

このとき、 C_1 は C_2 を x 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ 、 y 軸方向に $\boxed{\text{オカ}}$ だけ平行移動したものである。

- (2) $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$ 、 $BC = 7$ 、 $CA = 4\sqrt{2}$

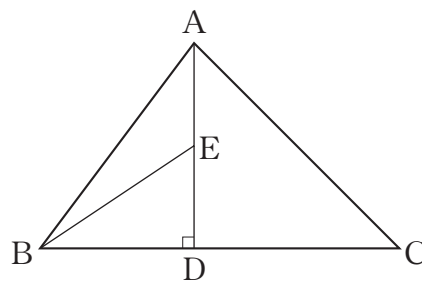
である。

点 A から辺 BC に垂線を引き、 BC との交点を D とする。また、線分 AD の中点を E とする。

このとき、 $AE = ED = \boxed{\text{キ}}$ である。

また、 $\triangle ABE$ の外接円の半径は

$$\frac{\boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}} \text{ である。}$$



- (3) 5 で割ると 3 余り, 7 で割ると 2 余る自然数を n とする。

このとき

$$n = 5x + 3 = 7y + 2 \quad \cdots \cdots (*)$$

を満たす 0 以上の整数 x, y が存在する。

(*) を満たす x, y を 1 組求めると

$$x = \boxed{\text{シ}}, y = \boxed{\text{ス}}$$

である。したがって, n は, 0 以上の整数 k を用いて

$$n = \boxed{\text{セソ}}k + \boxed{\text{タチ}} \quad (\text{ただし, } \boxed{\text{セソ}} > \boxed{\text{タチ}})$$

と表される。

このような n のうち, 3 桁の自然数で最小のものは $\boxed{\text{ツテト}}$ である。

- (4) a を正の実数とする。

$$\begin{cases} (\log_2 x)^2 + 4(\log_4 y)^2 = 1 \\ x^3 y^4 = a \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y が存在するような a の値の範囲を求める。

$\log_2 x = X, \log_2 y = Y$ とおくと, 第 2 式により

$$\boxed{\text{ナ}}X + \boxed{\text{ニ}}Y = \log_2 a$$

が得られる。この等式を利用すると, 求める a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}} \leq a \leq \boxed{\text{ハヒ}}$$

である。

第2問 1 から 12 までの整数が 1 つずつ書かれた 12 枚のカードがある。

この中から同時に 3 枚を取り出し、取り出したカードに書かれた数を小さい方から順に a, b, c とする。

(1) $a=4$ となるようなカードの取り出し方は、全部で アイ 通りある。

(2) 事象 X が起こるときの a, b, c の値の組の総数を $n(X)$ で表す。

abc が奇数であるという事象を A ,

abc が 3 の倍数であるという事象を B

とすると

$$n(A) = \text{ウエ}, \quad n(B) = \text{オカキ}, \quad n(A \cap B) = \text{クケ}$$

である。

したがって、 abc が 6 の倍数となるようなカードの取り出し方は、全部で

コサシ 通りある。

(3) abc が奇数であるとき、 abc が 3 の倍数である条件付き確率は $\frac{\text{ス}}{\text{セ}}$ である。

また、 abc が偶数であるとき、 abc が 3 の倍数である条件付き確率は $\frac{\text{ソタ}}{\text{チツ}}$ である。

第3問 関数 $f(x)$ を、 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ とすると、 $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{アイ}} \text{ および } x = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \text{ で極値をとる。}$$

また、 $y = f(x)$ のグラフを C とし、 C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線を $l: y = g(x)$ とする。

$$(1) \quad g(x) = (3t^2 + \boxed{\text{オ}}t - \boxed{\text{カ}})x - 2t^3 - \boxed{\text{キ}}t^2 + 4$$

$$f(x) - g(x) = (x - t)^2(x + \boxed{\text{ク}}t + \boxed{\text{ケ}})$$

であるから、 C と l に接点以外の共有点があるとき、その x 座標を s とすると

$$s = -\boxed{\text{ク}}t - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(2) (1)の結果を用いると

$$t = \boxed{\text{アイ}} \text{ のとき, } s = \boxed{\text{コ}}$$

$$t = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \text{ のとき, } s = -\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

したがって、 $-3 \leq x \leq \frac{5}{2}$ における $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{セ}}$ であり、最小値は $\boxed{\text{ソ}}$

である。

$\boxed{\text{セ}}$ 、 $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを、次の①～④の中からそれぞれ1つ選び、その番号を答えよ。

$$\textcircled{1} \quad f(-3) \qquad \textcircled{2} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) \qquad \textcircled{3} \quad f(\boxed{\text{アイ}}) \qquad \textcircled{4} \quad f\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$$

(3) l が原点 $(0, 0)$ を通るとき、 $t = \boxed{\text{タ}}$ であり、このとき、 C と l で囲まれた部分の

$$\text{面積は } \frac{\boxed{\text{チツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}} \text{ である。}$$

(数学の問題は終わり)