数 学

数 学

分数形で解答が求められているときは、既約分数で答えよ。符号は分子につけ、分母につけてはならない。また、根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

第1問 次の問いに答えよ。

- (1) $(\sqrt{6} - 1)^2$ の整数部分を a 、小数部分を b とする。

このとき、 $a = \boxed{\text{ア}}$ であり

$$b^2 - 5ab = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

- (2) あるクラスの生徒 20 人の英語のテストの得点を x 、国語のテストの得点を y として、変数 x 、 y について整理した結果、次の表を得た。

$\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ は、それぞれ x 、 y の平均値である。

番号	x	y	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	53	62	-5	25	-1	1	5
2	64	70	6	36	7	49	42
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	65	61	7	49	-2	4	-14
合計	A	1260	0	180	0	80	78

表の中の A の値は $\boxed{\text{エオカキ}}$ である。

また、 x と y の相関係数は $0.\boxed{\text{クケ}}$ である。

- (3) 赤玉 3 個と白玉 4 個が 1 つの袋の中に入っており、赤玉にはそれぞれに 1, 2, 3 の数が、白玉にはそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数が書かれている。

この袋の中から玉を同時に 3 個取り出す。

赤玉も白玉も取り出される確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

また、取り出した 3 個の玉に赤玉も白玉も含まれているとき、その中に 1 と書かれた

赤玉が含まれている条件付き確率は $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

- (4) 放物線 $y = x^2$ を C とする。

$0 < t < 3$ とし、 C 上の x 座標が t である点における、この曲線の接線を l とする。

直線 l と x 軸との共有点の x 座標は $\frac{t}{\boxed{\text{ソ}}}$ と表される。

次に、 C と l および x 軸で囲まれた部分と、 C と l および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積の和を S とすると

$$S = -\frac{1}{\boxed{\text{タ}}}t^3 + \boxed{\text{チ}}t^2 - \boxed{\text{ツ}}t + \boxed{\text{テ}}$$

である。

したがって、 $0 < t < 3$ の範囲における S の最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。

第2問

[1] 3桁の自然数 N において、百の位を a 、十の位を b 、一の位を c とする。

$$(1) N - (a + b + c) = \boxed{\text{ア}} (\boxed{\text{イウ}} a + b)$$

であるから、次のことが成り立つ。

N において、各位の数の和が $\boxed{*}$ の倍数であるとき、
 N は $\boxed{*}$ の倍数である。

$\boxed{*}$ に当てはまる1より大きい整数は、 $\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ である。

ただし、 $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。

(2) $b = 4$ とする。

N が18の倍数であるとき、最小の N は $\boxed{\text{カキク}}$ であり、18の倍数であるような N は全部で $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

[2] 方程式 $7x - 4y = 1$ のすべての整数解は、 k を整数として

$$x = \boxed{\text{コ}} k + \boxed{\text{サ}}, y = \boxed{\text{シ}} k + \boxed{\text{ス}}$$

と表される。

また、 $7x - 4y = 1$ を満たす自然数 x, y の組のうち、積 xy が9の倍数であるものを考える。このうち、 x が最小になるものは、

$$x = \boxed{\text{セソ}}, y = \boxed{\text{タチ}}$$

である。

第3問 t を実数の定数とし、 x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + (t+3)x^2 + 5x - 4t + 6$$

とする。

(1) 方程式 $P(x) = 0$ は、 t の値にかかわらず整数の解 $x = \boxed{\text{アイ}}$ をもつ。

したがって、 $P(x)$ は

$$P(x) = (x + \boxed{\text{ウ}}) \{ x^2 + (t + \boxed{\text{エ}})x - \boxed{\text{オ}}t + \boxed{\text{カ}} \}$$

と因数分解できる。

(2) 方程式 $P(x) = 0$ の解がすべて実数であるための t の条件は、

$$t \leq -\boxed{\text{キク}}, \boxed{\text{ケ}} \leq t$$

である。

次に、 $-\boxed{\text{キク}} < t < \boxed{\text{ケ}}$ ……(*)のときを考える。

このとき、方程式 $P(x) = 0$ は虚数解をもつ。この2つの虚数解を α , β とする。

(i) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 7$ となるとき、 $t = \boxed{\text{コサ}}$ である。

(ii) α^2 が虚数であるための条件は

$$(*) \text{の範囲の } t \text{ において、} t \neq \boxed{\text{シス}}$$

となることである。

さらに、 α^2 は虚数であるが α^3 は実数であるような t の値は、

$$t = \boxed{\text{セソ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

(数学の問題は終わり)