

修士論文

題目 線形特異摂動問題の有限要素解に対する
構成的 a priori 誤差評価

氏名 阿部良平

九州大学大学院数理学府 数理学専攻

指導教官 中尾充宏教授

平成 15 年 1 月 31 日

線形特異摂動問題の有限要素解に対する 構成的 a priori 誤差評価

目 次

- 1 Introduction
- 2 線形特異摂動問題と有限要素法
- 3 $\bar{L}$ -splines による構成的 a priori 誤差評価
- 4 Reaction diffusion problem に対する a priori 誤差評価
- 5 まとめと今後の課題

1 Introduction

この論文では次の一次元特異摂動問題 (singularly perturbed problem) について考える。
この問題は一般的に

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{on } x = 0, 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

と書ける。ただし $\Omega = (0, 1)$ 、 $a(x), b(x) \in W_1^\infty(\Omega)$ 、 $f(x) \in L_\infty(\Omega)$ 、 $\varepsilon > 0$ で ε は非常に小さい数とする。ここで文献 [1] によると、このような ε を係数として持つ問題は境界層を持つことが知られている。例えば文献 [1] の最初に簡単な問題として、

$$\begin{cases} \varepsilon u''(x) + u'(x) = 0 & \forall x \in \Omega = (0, 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 50 \end{cases} \quad (1.2)$$

とする。このとき解は

$$u = 50\{1 - \exp(-x/\varepsilon)\}\{1 - \exp(-1/\varepsilon)\}^{-1}$$

となり、 $x = 0$ が境界となる。ここで $\varepsilon=0.001$ として図を描くと、図 1 はほぼ $u=50$ と見た目は変わらない図になるが $x \in [0, 0.005]$ として図 2 を見ると、明らかに違いが出てきているのが分かる。この境界層をとらえることが特異摂動問題を解く上で重要で、この論文では境界層をとらえるために適合性の高い基底をもとにした有限要素近似を考え、その構成的 a priori 誤差評価を精度保証付きで求めることを目的とする。

ここでノルムとしてはまず L_1, L_2 ノルムは定義より全体の区間の平均が関係しているノル

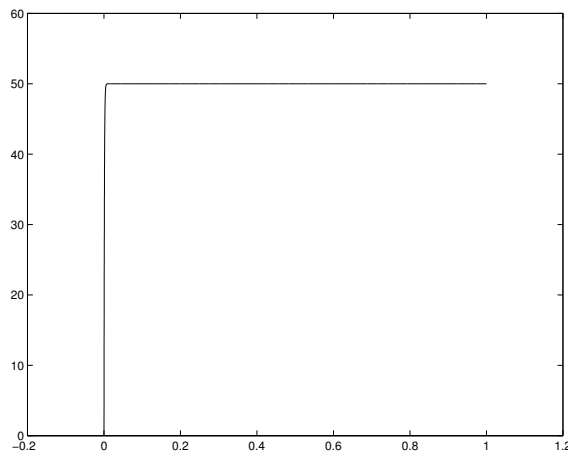


図 1: $\varepsilon=0.001$ の時の (1.2) の解 $u(x)$ $x \in [0, 1]$

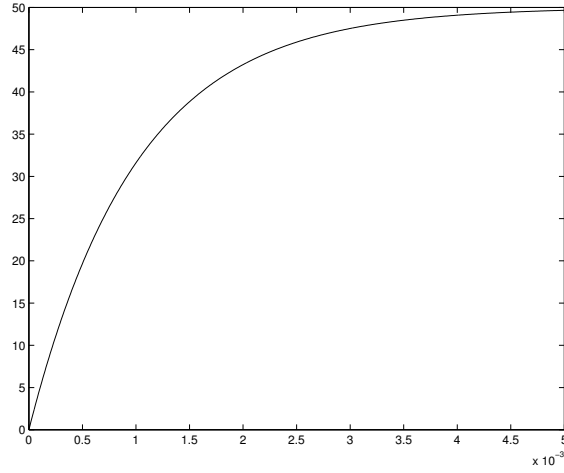


図 2: $\varepsilon=0.001$ の時の (1.2) の解 $u(x)$ $x \in [0, 0.005]$

ムでありこの問題のように小さな区間での現象を把握するにはあまり適していない。そこで平均を用いていないノルムとして L_∞ ノルム (最大値ノルム) を用いる。つまり

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad (1.3)$$

と定義する。

この論文では第二章で基礎事項を述べ、第三章において (1.1) で $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$ とする convection diffusion problem (移流拡散問題) について考える。

通常の区分多項式を用いた有限要素法による (1.1) の近似解 u_h と真の解 u との誤差は一般に次のように書ける。

$$\|u - u_h\|_\infty \leq C(\varepsilon)h \quad (1.4)$$

この場合 ε に依存した定数によってしか誤差評価できず、 ε が 0 に近づくとき $C(\varepsilon)$ は無限大に発散してしまうので評価としては望ましくないものとなる。そこでこの論文では convection diffusion problem (1.1) に対して $\bar{L}$ -splines (exponentially fitted splines) という指数関数を基底とした有限要素法を用いて、この u と u_h の誤差を評価する。そうすると ε と h に独立な C で

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch\|f\|_\infty \quad (1.5)$$

となる評価を行うことができる。(文献 [2][3][4][5] より) 特にこの論文では精度保証の観点からこの C を数値的に評価することを試みる。なおその結果を用いれば文献 [6] より (1.1) の右辺が $f = f(u)$ のような非線形問題に対して精度保証付きで解を求める技法に応用できることを注意しておく。

次に第四章では $a = 0$, $b \geq \beta > 0$ の reaction diffusion problem (反応拡散問題) に対してこの $\bar{L}$ -splines を用いた構成的誤差評価を行いその実用性について考察する。

最後に、この論文の作成にあたって多大なご指導をいただきました中尾充宏先生に感謝の意を申し上げます。また多くの助言をくださった情報基盤センターの渡部善隆先生、博士課程の橋本弘治先輩に感謝いたします。

2 線形特異摂動問題と有限要素法

まずここでは最初に標準的な有限要素法の基本的な結果を紹介する。Dirichlet 境界条件の下で次の Linear convection–diffusion problem を考える。

$$\begin{cases} Lu &:= -\varepsilon u'' + au' + bu = f \quad \text{on } \Omega = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

ただし $\varepsilon > 0$ で非常に小さい数としてそれぞれ次を満たすとする。

$a(x), b(x) \in W_1^\infty(\Omega)$ 、 $f(x) \in L_\infty(\Omega)$ 、 $a(x) \geq \alpha > 0$ 、 $b(x) \geq \beta > 0$ 、 $\alpha^2 + 4\varepsilon\beta = \lambda > 0$
関数空間として $V \subset_{dense} H_0^1(\Omega)$ を考える。ただし H_0^1 は 1 階の Sobolev 空間で

$$H_0^1(\Omega) = \{v, v' \in L^2(\Omega) | v(0) = v(1) = 0\}$$

また Ω 上の L^2 内積は

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dt \quad u, v \in V$$

とする。

ここで次の双一次形式 $A : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ を定義する。

$$A(u, v) = (\varepsilon u', v') + (au', v) + (bu, v) \quad \forall u, v \in V \quad (2.7)$$

このとき (2.6) の弱解をつぎの変分問題で定義する。

$$u \in V \quad \text{s.t.} \quad A(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (2.8)$$

この変分問題が解を持ってかつ一意である十分条件として Lax-Milgram の lemma が成り立っている。

Lemma 2.1 $A(\cdot, \cdot)$ を (2.7) 式を満たす双一次形式とする。 $A(\cdot, \cdot)$ が連続 (有界性) かつ強圧的 (V -楕円型) であればこのとき (2.8) は唯一つの解を持つ。

ただしここでいう $A(\cdot, \cdot)$ が連続とはある定数 $\gamma > 0$ に対して

$$|A(v, w)| \leq \gamma \|v\| \|w\| \quad v, w \in V \quad (2.9)$$

が成り立つことで、強圧的とはある定数 $\mu > 0$ に対して

$$A(v, v) \geq \mu \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (2.10)$$

が成り立つことである。

ここで V の有限次元部分空間 V_h を用意し V_h 上で (2.8) の変分問題を考える。つまり $V_h \subset V$

で(2.8)に対応する離散問題 (Ritz-Galerkin 法) を考える。

$$u_h \in V_h \quad \text{s.t.} \quad A(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.11)$$

Lax-Milgram の lemma はこの離散問題も唯一つの解を持つことを保証する。そこでこの離散問題を解いて (2.8) の近似解とする。

ここで以下の準備としていくつか定理等をあげておく。

Theorem 2.2 (最大値原理) $u \in C^2(\Omega)$ $L : (2.6)$ を満たす微分作用素とする。このとき $\forall x \in \Omega$ に対して $u(0) \geq 0$ 、 $u(1) \geq 0$ 、 $Lu(x) \geq 0$

$$\Rightarrow u(x) \geq 0$$

proof)

$p \in \Omega$ で $u(p) < 0$ とおく。仮定より $p \notin \{0, 1\}$ となる。

$w = ue^{-\alpha x/2\varepsilon}$ とおくと $w(p) < 0$

($u(p) < 0$ 、 $e^{-\alpha x/2\varepsilon} > 0$ より)

ここで $w(q) = \min_{\Omega} w(x) < 0$ と q を定義すると $w'(q) = 0$ 、 $w''(q) > 0$ となる。次に

$$\begin{aligned} Lu(x) &= L(we^{\alpha x/2\varepsilon}) \\ &= -\varepsilon\{w''e^{\alpha x/2\varepsilon} + 2\frac{\alpha}{2\varepsilon}w'e^{\alpha x/2\varepsilon} + w(\frac{\alpha}{2\varepsilon})^2e^{\alpha x/2\varepsilon}\} \\ &\quad + a(w'e^{\alpha x/2\varepsilon} + w\frac{\alpha}{2\varepsilon}e^{\alpha x/2\varepsilon}) + bwe^{\alpha x/2\varepsilon} \end{aligned}$$

となる。よって $w'(p) = 0$ 、 $b \geq \beta > 0$ 、 $a \geq \alpha > 0$ を用いると

$$\begin{aligned} Lu(p) &= -\varepsilon w''(p)e^{\alpha p/2\varepsilon} + (-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon} + \frac{\alpha a}{2\varepsilon})w(p)e^{\alpha p/2\varepsilon} + bw(p)e^{\alpha p/2\varepsilon} \\ &\leq -\varepsilon w''(p)e^{\alpha p/2\varepsilon} + \frac{\alpha^2}{4\varepsilon}w(p)e^{\alpha p/2\varepsilon} + \beta w(p)e^{\alpha p/2\varepsilon} \\ &< 0 \quad (\alpha^2 + 4\varepsilon\beta > 0, w''(p) > 0, w(p) < 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

これは $Lu \geq 0$ に矛盾。よって $u \geq 0$ が成り立つ。(証明終)

更に次の Lemma を準備しておく。

Lemma 2.3 (2.6) の解 u に対して次の等式が成り立つ。

$$u(x) = u_p(x) + K_1 + K_2 \int_x^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(t))\} dt \quad (2.12)$$

ただし

$$\begin{aligned}h &= f - bu \\u_p(x) &= - \int_x^1 z(t) dt \\z(x) &= \int_x^1 \varepsilon^{-1} h(t) \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(t) - \hat{a}(x))\} dt \\ \hat{a}(x) &= \int_0^x a(t) dt\end{aligned}$$

proof)

$-\varepsilon u'' + au' = h$ より両辺に $\exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(x)\}$ をかけて、

$$\begin{aligned}(-\varepsilon u'' + au') \exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(x)\} &= h \exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(x)\} \\(-\varepsilon u' \exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(x)\})' &= h \exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(x)\}\end{aligned}$$

ここで両辺を x から 1 まで積分すると

$$-\varepsilon u'(1) \exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(1)\} + \varepsilon u'(x) \exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(x)\} = \int_x^1 h \exp\{-\varepsilon^{-1}\hat{a}(x)\} dt$$

ゆえに

$$\begin{aligned}u'(x) &= \int_x^1 \varepsilon^{-1} h(t) \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(t) - \hat{a}(x))\} dt + u'(1) \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(x))\} \\ &= z(x) + u'(1) \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(x))\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

さらに両辺を x から 1 まで積分すると、

$$u(1) - u(x) = \int_x^1 z(t) dt + u'(1) \int_x^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(t))\} dt$$

よって

$$u(x) = u_p(x) + u(1) - u'(1) \int_x^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(t))\} dt$$

なので $K_1 = u(1)$ 、 $K_2 = -u'(1)$ とおけば (2.12) 式が成り立つ。(証明終)

また有限要素法を解く時には行列方程式を解くことになるので行列の性質について話しておく。まず記号として $x \geq 0$ とはベクトル x の成分が全て non-negative で行列 $B \geq 0$ についても同様。

Definition 2.4 $B : n \times n$ 実行列とおく。このとき任意の n 次ベクトル x に対して $Bx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ が成り立つとき B :単調 (monotone) と定義する。

この定義から次の必要十分条件が成り立つ。

Lemma 2.5

$B:\text{monotone} \iff B:\text{正則で } B^{-1} \geq 0$

proof)

($\Rightarrow$)

まず B が正則でないと仮定する。ここで n 次ベクトル $x \neq 0$ 、 $y \neq 0$ に対して $Bx = 0$ 、 $By = 0$ とおく。すると $B(x - y) = B(y - x) = 0$ であり、 $B:\text{monotone}$ より $x - y \geq 0$ 、 $y - x \geq 0$ となる。よって $x = y$ となる。ゆえに $x = 0$ は自明な解で $Bx = 0$ の解は $x = 0$ のみである。これは B 正則でないに矛盾。よって $B:\text{正則}$ が成り立つ。

次に $D := B^{-1} = (D_{i,j})$ として $D_{k,l} < 0$ なる $k, l \in \{1, \dots, n\}$ が存在すると仮定する。そして、 n 次ベクトル $x = (x_i)$ を $x_i = \delta_{kl}$ により定める。このとき $x = BB^{-1}x \geq 0$ となるが、 $B:\text{monotone}$ であることから $y := B^{-1}x \geq 0$ となり、 $y_k = D_{k,l} < 0$ に矛盾。よって $B^{-1} \geq 0$ が成り立つ。

($\Leftarrow$)

$B:\text{正則で } B^{-1} \geq 0$ より、

$Bx \geq 0$ の両辺に左から B^{-1} をかけると、

$x \geq 0$ となるので $B:\text{monotone}$ となる。(証明終)

Definition 2.6 $B:n \times n$ 実行列が既約とは $\exists P:n \times n$ 置換行列に対して

$$PBP^T = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

となる P が存在しないことである。

ただし B_{11}, B_{22} はそれぞれ $r \times r$ 行列、 $(n - r) \times (n - r)$ 行列 ($1 < r < n$) とする。

Definition 2.7 $B = (b_{ij}): n \times n$ 実行列 $B:$ 優対角行列とは次が成り立つことである。

$$|b_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |b_{i,j}| \quad 1 \leq i \leq n$$

特に優対角行列 B が Def2.6、Def2.7 を満たしてかつ

$$|b_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |b_{i,j}|$$

を満たす $1 \leq i \leq n$ が少なくとも一つ存在するとき B は既約優対角であるという。

Lemma 2.8 $B \geq 0$ のとき次の必要条件が成り立つ。

$B:\text{既約} \iff (I - B)^{-1} \geq 0$

proof)

($\Rightarrow$) B :既約とおく。 $\forall x \geq 0$ に対して $(I - B)^{-1} \geq 0$ を示す。まず任意の非負ベクトル x_0 に対して $x_1 = (I - B)x_0 = x_0 - Bx_0$ とおく。この式より x_1 のゼロ成分は x_0 より多くないことは明らか。仮に同じとすると $\exists P : n \times n$ 置換行列を用いて

$$Px_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad Px_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし $\alpha > 0, \beta > 0$ で成分の数は m である。 $(1 \leq m < n)$ ここで x_1 の定義より

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし B_{11}, B_{22} は正方行列で次数は m とする。この式より $B_{21} = 0$ が成り立つ。ここで $B_{21} \geq 0, \beta > 0$ より $B_{21} = 0$ となる。これは B :既約に矛盾。よって x_1 のゼロ成分は x_0 より少ない。ゆえに

$$x_0 = (I - B)^{-1}x_1 \geq 0$$

がいえる。よって任意の $x \geq 0$ に対して $(I - B)^{-1}x \geq 0$ が成り立つ。よって $(I - B)^{-1} \geq 0$ が成り立つ。

($\Leftarrow$) B :可約と仮定すると、ある $n \times n$ 置換行列 P によって

$$PBP^T = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

と書ける。ただし B_{11}, B_{22} は m 次正方行列として $B_{11}, B_{12}, B_{22} \neq 0$ とする。 $(1 \leq m < n)$ この式より

$$I - PBP^T = PP^T - PBP^T = P(I - B)P^T = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ 0 & B'_{22} \end{bmatrix}$$

と書ける。ただし B'_{11}, B'_{22} は m' 次正方行列として $B'_{11}, B'_{12}, B'_{22} \neq 0$ とする。 $(1 \leq m' < n)$ この式を用いると

$$P^T = (I - B)^{-1}P^T \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ 0 & B'_{22} \end{bmatrix} \geq 0$$

ここで $(I - B)^{-1} > 0, P \geq 0$ より

$$\begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ 0 & B'_{22} \end{bmatrix} \geq 0$$

が成り立つ。ここで

$$(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} > 0$$

とおくと

$$(I - B)(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ 0 & B'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ B'_{22}D_{21} & * \end{bmatrix} = I$$

よって $B'_{22}D_{21} = 0$ となる。ここで $B'_{22} \geq 0$ 、 $D_{21} > 0$ なので $B'_{22} = 0$ となる。これは矛盾。よって B は既約が成り立つ。(証明終)

Lemma 2.9 $B : n \times n$ 実行列、既約優対角でかつ $b_{i,j} \leq 0 \ i \neq j$ $b_{i,i} > 0 \ 1 \leq i \leq n$
 $\Rightarrow B$:正則でかつ $B^{-1} \geq 0$

proof)

$Bx = 0$ とおく。ただし $x \neq 0$ 。このときまず x を正規化しておく。するとある $\exists k$ にたいして

$\max_i(x_i) = x_k = |x_k| = 1$ が成り立つ。ここで

$$\sum_{j=1}^n B_{ij}x_j = 0$$

なので

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ij}x_j = B_{ii}x_i$$

となるので特に $i = k$ を考えて絶対値を取ると

$$|B_{kk}||x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |B_{kj}||x_j| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |B_{kj}||x_k|$$

が成り立つ。よって両辺 $|x_k|$ で割ると、

$$|B_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |B_{kj}|$$

となる。しかしこれは B が既約優対角に矛盾。 $Bx = 0$ ならば必ず $x = 0$ となりつまり B :正則がいえる。

次に $B^{-1} \geq 0$ を示す。まず B を正規化して $B' = I - D'$ と分解する。ただし I は $n \times n$ 単位行列で $D' \geq 0$ 。ここで B :既約より B' も既約。よって D' も既約も明らか。よって lemma2.8 より $(I - D')^{-1} = B'^{-1} \geq 0$ が成り立つ。

次に (2.6) に対する有限要素法について考える。まず $[0,1]$ を N 個の小区間に等分割する。つまり

$$\begin{cases} x_i := \frac{i}{N} & 0 \leq i \leq N \\ h := \frac{1}{N} = x_i - x_{i-1} \end{cases}$$

として x_i を格子点と呼ぶ。

いま部分空間 $S_h \subset V$ を $\phi_i \in V$ かつ $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ なる $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ を基底とする V の $N+1$ 次元部分空間として (2.8) を解く事を考える。いま近似解 u_h を、

$$u_h \in S_h \quad u_h = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(x) \quad u_i \in \mathbf{R} \quad 0 \leq i \leq N \quad (2.14)$$

で表す。更に $\{\psi_i\}_{i=0}^N \subset V$ かつ $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$ なる別の有限次元部分空間 T_h を用意し、 S_h を trial space、 T_h を test space とする Petrov-Galerkin 法を考える。

そこで次の双一次形式 $A_h : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ を定義する。

$$A_h(u, v) := (\varepsilon u', v') + (\bar{a}(x)u', v) + (\bar{b}(x)u, v) \quad \forall u, v \in V \quad (2.15)$$

ただし $\bar{a}(x) = \{a(x_{i-1}) + a(x_i)\}/2$, $\bar{b}(x) = \{b(x_{i-1}) + b(x_i)\}/2$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$

このとき $S_h: \phi_i$ を基底とする trial space とし、 $T_h: \psi_i$ を基底とする test space とした離散 Petrov-Galerkin 法を次で定義する。

$$u_h \in S_h \quad \text{s.t.} \quad A_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in T_h \quad (2.16)$$

つまり (2.8) を解く代わりに上の (2.16) を解いて近似解 u_h を求める。

次に基底として $\bar{L}$ -splines(exponentially fitted splines) を導入する。これは平均を用いた微分作用素 $\bar{L}$ を用いて

$$\begin{cases} \bar{L}\phi_i := -\varepsilon\phi_i'' + \bar{a}\phi_i' + \bar{b}\phi_i = 0 & (x_{i-1}, x_i) \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ \phi_i(x_j) = \delta_{ij} & 1 \leq i, j \leq N-1 \end{cases} \quad (2.17)$$

で定義され、 ϕ_i は指数関数になる。またこれに対して $\bar{L}^*$ -splines とは

$$\begin{cases} \bar{L}^*\phi_i := -\varepsilon\phi_i'' - \bar{a}\phi_i' + \bar{b}\phi_i = 0 & (x_{i-1}, x_i) \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ \phi_i(x_j) = \delta_{ij} & 1 \leq i, j \leq N-1 \end{cases} \quad (2.18)$$

で定義される。次の章ではこの基底関数を用いた有限要素法による線形 convection diffusion problem の構成的誤差評価を考える。

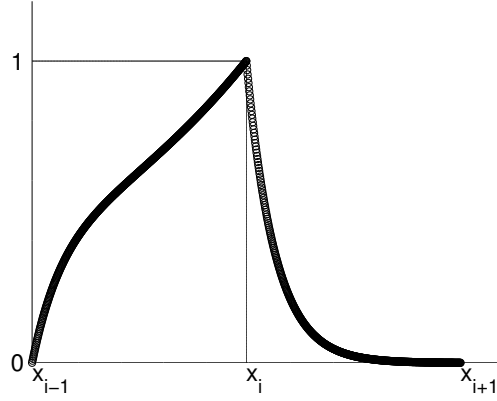


図 3: $\bar{L}$ -splines のグラフ

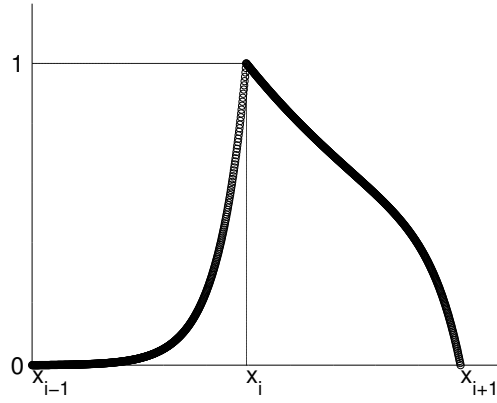


図 4: $\bar{L}^*$ -splines のグラフ

3 $\bar{L}$ -splines による構成的 a priori 誤差評価

この章では convection diffusion problem に対する構成的 a priori 誤差評価を試みる。文献 [2] によると Petrov-Galerkin 法の test space はその問題の Green's function によって構成することが適切であり、そうすると任意の trial space に対して格子点で所望の誤差評価を得ることができる。

そこで x_j を格子点として離散 Green's function $G_j(x)$ $0 \leq x \leq 1$ を次で定義する。

Definition 3.1

$$A_h(w, G) = w(x_j) \quad \forall w \in H_0^1(0, 1) \quad (3.19)$$

ただし $G_j(x) := G(x, x_j)$ は次の 4 つの式を満たす。

$$-\varepsilon G_j'' - \bar{a} G_j' + \bar{b} G_j = 0 \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (3.20)$$

$$G_j(x) \in C[0, 1] \quad (3.21)$$

$$G_j(0) = G_j(1) = 0 \quad (3.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} (-\varepsilon G_j' - \bar{a} G_j) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} (-\varepsilon G_j' - \bar{a} G_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (3.23)$$

この (3.20)(3.23) を用いると次が成り立つ。

Lemma 3.2

$$\varepsilon G_j' + \bar{a} G_j = \varepsilon G_j'(0) + \int_0^x \bar{b} G_j - H_j(x) \quad x \in [0, 1] \setminus \{x_1, \dots, x_{N-1}\} \quad (3.24)$$

ただし、

$$H_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq x_j \\ 0 & \text{if } x < x_j \end{cases}$$

proof)

$1 < k < N$ で $x \in (x_k, x_{k+1})$ とすると (3.20) の両辺を積分して

$$\int_0^x \{-\varepsilon G_j'' - \bar{a} G_j'\} dt = - \int_0^x \bar{b} G_j dt$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{\varepsilon G_j'' + \bar{a} G_j'\} dt + \int_{x_k}^x \{\varepsilon G_j'' + \bar{a} G_j'\} dt = \int_0^x \bar{b} G_j dt$$

となるので

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{\varepsilon G_j'' + \bar{a} G_j'\} dt + \int_{x_k}^x \{\varepsilon G_j'' + \bar{a} G_j'\} dt \\ &= \sum_{i=1}^k [\varepsilon G_j' + \bar{a} G_j]_{x_{i-1}}^{x_i} + [\varepsilon G_j' + \bar{a} G_j]_{x_k}^x \\ &= \int_0^x \bar{b} G_j dt - (\varepsilon G_j' + \bar{a} G_j)(0) + \sum_{i=1}^k (\varepsilon G_j' + \bar{a} G_j)(x_i^-) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k (\varepsilon G_j' + \bar{a} G_j)(x_i^+) + (\varepsilon G_j' + \bar{a} G_j)(x) \\ &= \int_0^x \bar{b} G_j dt \end{aligned}$$

よって (3.23) より

$$\sum_{i=1}^k (\varepsilon G'_j + \bar{a} G_j)(x_i^-) - \sum_{i=1}^k (\varepsilon G'_j + \bar{a} G_j)(x_i^+) = H_j(x)$$

となる。よって

$$\varepsilon G'_j(x) + \bar{a} G_j(x) = \varepsilon G'_j(0) + \int_0^x \bar{b} G_j - H_j(x)$$

となり、上の式が成り立つ。(証明終)

この離散 Green's function を用いることにより格子点での誤差評価が求まる。

$\{\phi_i\}_{i=1}^{N-1}$ を任意の S_h の基底、 $\{\psi_i\}_{i=1}^{N-1}$ を (2.18) を満たす T_h の基底 ($\bar{L}^*$ -splines) とする。

Theorem 3.3 $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ は前出の関数 (a 、 b の近似) とする。このとき $\bar{L}^*$ -splines を基底関数とする test space として (2.16) の Petrov-Galerkin 法を解くと、任意の trial space に対して次の格子点誤差評価が得られる。

$$|(u - u_h)(x_i)| \leq C_2 h \|f\|_\infty \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.25)$$

ただし C_2 とは

$$C_1 := \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\|b\|_\infty}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|a\|_\infty}{\alpha}\right)$$

に対して

$$C_2 := \frac{1}{\beta} \{C_1 \|a'\|_\infty + \frac{1}{\alpha} \|b'\|_\infty\}$$

と定義する。

proof)

まず G_j の定義式 (3.19) より $w = u - u_h$ とおくと、

$$\begin{aligned} (u - u_h)(x_i) &= (A_h)(u - u_h, G_i) \\ &= A_h(u, G_i) - (f, G_i) - \{A(u, G_i) - (f, G_i)\} \\ &= (A_h - A)(u, G_i) \\ &= (\bar{a}u', G_i) + (\bar{b}u, G_i) - (au' + bu, G_i) \\ &= (u', (\bar{a} - a)G_i) + (u, (\bar{b} - b)G_i) \end{aligned}$$

よって

$$|(u - u_h)(x_i)| \leq \|u'\|_{L_1} \|\bar{a} - a\|_\infty \|G_j\|_\infty + \|u\|_\infty \|\bar{b} - b\|_{L_1} \|G_j\|_\infty \quad (3.26)$$

となる。まず $\|u\|_\infty \leq C$ 、 $\|u'\|_{L_1} \leq C$ 、 $\|G_i\|_\infty \leq C$ をす。

まず最初に $\|u\|_\infty \leq C$ から示す。これは Thm2.1 の最大値原理を用いる。

いま $y = C\|f\|_\infty x \pm u$ とおくと

$$y(0) = \pm u(0) = 0$$

$$y(1) = C\|f\|_\infty \geq 0$$

$$\begin{aligned} Ly &= aC\|f\|_\infty + bC\|f\|_\infty x \pm f \\ &\geq C\alpha\|f\|_\infty \pm f \end{aligned}$$

となり $C \geq 1/\alpha$ であれば $Ly \geq 0$ となる。よって $C=1/\alpha$ ととれば最大値原理を用いれば $[0,1]$ で $y \geq 0$ が成り立つ。よって

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty \quad (3.27)$$

が成り立つ。

次に $\|u'\|_{L_1}$ について評価する。Lemma2.3 から次の評価を得る。

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leq \int_x^1 |-\varepsilon^{-1}h(t)| \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(t) - \hat{a}(x))\} dt \\ &\leq \varepsilon^{-1} \|f - bu\|_\infty \int_x^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(t) - \hat{a}(x))\} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) - \hat{a}(x) &= \int_x^t a(s) ds \geq \alpha(t - x) \\ &\quad (a \geq \alpha > 0, t > x \text{ より}) \end{aligned}$$

よって

$$\exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(t) - \hat{a}(x))\} \leq \exp\{-\varepsilon^{-1}\alpha(t - x)\}$$

となり、

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leq \varepsilon^{-1} \|f - bu\|_\infty [-\varepsilon\alpha^{-1} \exp\{-\varepsilon^{-1}\alpha(t - x)\}]_x^1 \\ &= \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty \{1 - \exp\{-\varepsilon^{-1}\alpha(1 - x)\}\} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty \quad (0 < \exp\{-\varepsilon^{-1}\alpha(1 - x)\} \leq 1 \text{ より}) \end{aligned}$$

次に $u(0) = u_p(0) - u'(1) \int_0^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(t))\}dt$ **なので、**

$$|u_p(0)| = |u'(1) \int_0^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(t))\}dt|$$

ここで $\|a\|_\infty$ を用いると、

$$\begin{aligned} \hat{a}(1) - \hat{a}(t) &= \int_t^1 a(s)ds \\ &\leq \|a\|_\infty(1-t) \quad (\|a\|_\infty \geq a > 0, 1 > t \text{ より}) \end{aligned}$$

が成り立つ。これを用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(t))\}dt &\geq \int_0^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty(1-t)\}dt \\ &= \varepsilon\|a\|_\infty^{-1}[\exp\{-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty(1-t)\}]_0^1 \\ &= \varepsilon\|a\|_\infty^{-1}\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} |u'(1)| &= |u_p(0)|[\int_0^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(t))\}dt]^{-1} \\ &\leq \int_0^1 |z(t)|dt\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty \varepsilon^{-1}\|a\|_\infty\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1} \end{aligned}$$

ゆえに (2.13) 式より

$$\begin{aligned} |u'(x)| &\leq |z(t)| + |u'(1)\exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(x))\}| \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|f - bu\|_\infty[1 + \varepsilon^{-1}\|a\|_\infty\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1}\exp\{-\varepsilon^{-1}(\hat{a}(1) - \hat{a}(x))\}] \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty [1 + \varepsilon^{-1}\|a\|_\infty\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1}\exp\{-\varepsilon^{-1}\alpha(1-x)\}] \quad (3.28) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |u'|dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty [1 + \varepsilon^{-1}\|a\|_\infty\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1} \int_0^1 \exp\{-\varepsilon^{-1}\alpha(1-x)\}dx] \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty [1 + \varepsilon^{-1}\|a\|_\infty\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1} [\varepsilon\alpha^{-1}\exp\{-\varepsilon^{-1}\alpha(1-x)\}]_0^1] \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty [1 + \frac{\|a\|_\infty}{\alpha}\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1}\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\alpha)\}] \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha < \|a\|_\infty \Rightarrow \exp(-\alpha) > \exp(-\|a\|_\infty) \Rightarrow 1 - \exp(-\alpha) < 1 - \exp(-\|a\|_\infty)$$

より

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L_1} &= \int_0^1 |u'| dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f - bu\|_\infty (1 + \frac{\|a\|_\infty}{\alpha}) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (1 + \frac{\|b\|_\infty}{\alpha}) \|f\|_\infty (1 + \frac{\|a\|_\infty}{\alpha}) =: C_1 \|f\|_\infty \end{aligned} \quad (3.29)$$

が成り立つ。

次に $\|G_j\| \leq C$ を示す。(3.20) 式より $G_j \in T_h$ であり ψ_j の一次結合で書けるので α_k :unique constants を使って

$$G_j = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \psi_k \quad (3.30)$$

と書ける。次に G_j の定義式から $w = \phi_i$ とおけば、

$$A_h(\phi_i, G_j) = \phi_i(x_j)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k A_h(\phi_i, \psi_k) = \delta_{ij} \quad i = 1, \dots, N-1$$

となる。ここで A_h について計算すると、

$$\begin{aligned} A_h(\phi_i, \psi_k) &= \varepsilon(\phi'_i, \psi'_k) + \bar{a}(\phi'_i, \psi_k) + \bar{b}(\phi_i, \psi_k) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon[\phi_i \psi'_k]_{x_{j-1}}^{x_j} + \sum_{j=1}^{N-1} \bar{a}[\phi_i, \psi_k]_{x_{j-1}}^{x_j} + (\phi_i, -\varepsilon \psi'_k - \bar{a} \psi'_k + \bar{b} \psi_k) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon[\phi_i \psi'_k]_{x_{j-1}}^{x_j} + \sum_{j=1}^{N-1} \bar{a}[\phi_i, \psi_k]_{x_{j-1}}^{x_j} \quad (-\varepsilon \psi'_k - \bar{a} \psi'_k + \bar{b} \psi_k = 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

ここで $R_{i,k} = (a_h(\phi_i, \psi_k)) : (N-1) \times (N-1)$ 行列 とおくと、

$$R_{j-1,j} = \varepsilon[\phi_{j-1} \psi'_j]_{x_{j-1}}^{x_j} + \bar{a}[\phi_{j-1} \psi_j]_{x_{j-1}}^{x_j} = (-\varepsilon \psi'_j - \bar{a} \psi_j)(x_{j-1}^+)$$

$$\begin{aligned} R_{j,j} &= \varepsilon[\phi_j \psi'_j]_{x_{j-1}}^{x_j} + \bar{a}[\phi_j \psi_j]_{x_{j-1}}^{x_j} + \varepsilon[\phi_j \psi'_j]_{x_j}^{x_{j+1}} + \bar{a}[\phi_j \psi_j]_{x_j}^{x_{j+1}} \\ &= (\varepsilon \psi'_j + \bar{a} \psi_j)(x_j^-) - (\varepsilon \psi'_j + \bar{a} \psi_j)(x_j^+) \end{aligned}$$

$$R_{j+1,j} = \varepsilon[\phi_{j+1} \psi'_j]_{x_j}^{x_{j+1}} + \bar{a}[\phi_{j+1} \psi_j]_{x_j}^{x_{j+1}} = (\varepsilon \psi'_j + \bar{a} \psi_j)(x_{j+1}^-)$$

という三対角行列となる。ここで、

$$\begin{aligned}
& R_{j-1,j} + R_{j,j} + R_{j+1,j} \\
&= (-\varepsilon\psi'_j - \bar{a}\psi_j)(x_{j-1}^+) + (\varepsilon\psi'_j + \bar{a}\psi_j)(x_j^-) - (\varepsilon\psi'_j + \bar{a}\psi_j)(x_j^+) + (\varepsilon\psi'_j + \bar{a}\psi_j)(x_{j+1}^-) \\
&= \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \{(\varepsilon\psi'_j + \bar{a}\psi_j)(x)\}' dx \\
&= \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \{(\varepsilon\psi''_j + \bar{a}\psi'_j)(x)\} dx \\
&= \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \bar{b}\psi_j dx \\
&\geq \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \beta\psi_j dx \\
&\geq 0 \quad (\beta > 0 \text{ より})
\end{aligned}$$

が成り立つ。また ψ_j の形より $\psi'_j(x_{j-1}^+) \geq 0$ 、 $\psi'_j(x_{j+1}^-) \leq 0$ なので、

$$\begin{aligned}
R_{j-1,j} &= (-\varepsilon\psi'_j - \bar{a}\psi_j)(x_{j-1}^+) = -\psi'_j(x_{j-1}^+) \leq 0 \\
R_{j,j+1} &= (\varepsilon\psi'_j + \bar{a}\psi_j)(x_{j+1}^-)\psi'_j(x_{j+1}^-) \leq 0
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{N-1} |R_{j,i}| \leq R_{j,j}$$

なので R は既約優対角となり、Lemma 2.9 より R は正則で $R^{-1} \geq 0$ となる。

$\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k A_h(\phi_i, \psi_k) = \delta_{ij}$ より $R(\alpha_k)_{k=1}^{N-1} \geq 0$ となり、 $(\alpha_k)_{k=1}^{N-1} \geq 0$ となる。よって (3.30) 式より $G_j \geq 0$ が成り立つ。

ここで $G_j(0) = 0$ 、 $G_j(x) \geq 0$ より $G'_j(0) \geq 0$ が成り立つ。今 $G_j(x) > 1/\beta$ と仮定すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon G'_j(1) &= \varepsilon G'_j(0) + \int_0^1 \bar{b} G_j(t) dt - H_j(1) \\
&> \beta(1/\beta) - 1 \quad (\bar{b} > \beta > 0 \text{ より}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ここで $G_j(1) = 0, G_j(x) \geq 0$ より $G'_j(1) \leq 0$ が成り立たなければならない。よって矛盾。ゆえに

$$\|G_j\|_\infty \leq \frac{1}{\beta} \tag{3.31}$$

が成り立つ。

次に $\|\bar{a} - a\|_\infty$ については $\exists \xi \in (x_{i-1}, x_i)$ s.t. $(\bar{a} - a)(\xi) = 0$ となるので、

$$\begin{aligned}
(\bar{a} - a)(x) &= \int_{x_{i-1}}^\xi (\bar{a} - a)' dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^\xi -a' dx
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\|\bar{a} - a\|_{\infty} &\leq \int_{x_{i-1}}^{\xi} |a'| dx \\ &\leq \|a'\|_{\infty} h\end{aligned}$$

よって

$$\|\bar{a} - a\|_{\infty} \leq \|a'\|_{\infty} h \quad (3.32)$$

次に $\|\bar{b} - b\|_{L_1}$ についても同様に計算して

$$\begin{aligned}\|\bar{b} - b\|_{L_1} &\leq \int_0^1 \|b'\|_{\infty} h dx \\ &\leq \|b'\|_{\infty} h\end{aligned}$$

よって

$$\|\bar{b} - b\|_{L_1} \leq \|b'\|_{\infty} h \quad (3.33)$$

以上の結果を (3.26) 式にまとめると、(3.27)(3.29)(3.31)(3.32)(3.33) 式より任意の trial space に対して

$$\begin{aligned}|(u - u_h)(x_i)| &\leq C_1 \|f\|_{\infty} \|a'\|_{\infty} h \frac{1}{\beta} + \frac{\|f\|_{\infty}}{\alpha} \|b'\|_{\infty} h \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \{C_1 \|a'\|_{\infty} + \frac{1}{\alpha} \|b'\|_{\infty}\} h \|f\|_{\infty} =: C_2 h \|f\|_{\infty}\end{aligned}$$

が成り立つ。(証明終)

ここまでの議論は任意の trial space に対して成り立つ。次に trial space を $\bar{L}$ -splines にとつた場合の $\|u - u_h\|_{\infty}$ について評価する。

$$\begin{cases} \bar{L}\phi_i = -\varepsilon\phi_i'' + \bar{a}\phi_i' + \bar{b}\phi_i = 0 & (x_{i-1}, x_i) \quad i = 1 \cdots N \\ \phi_i(x_j) = \delta_{ij} & i, j = 1 \cdots N \end{cases}$$

を基底とする trial space で考える。ここで次の離散最大値原理をまず示しておく。

Theorem 3.4

$$v, w \in C^2(x_{i-1}, x_i) \cap C^1(x_{i-1}, x_i)$$

$$\bar{L}v \leq \bar{L}w \quad \text{in } I_i = (x_{i-1}, x_i)$$

$$\text{かつ } v(x_{i-1}) \leq w(x_{i-1}), \quad v(x_i) \leq w(x_i)$$

$$\implies v \leq w \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

proof)

$v(p) > w(p) \quad \exists p \in (x_{i-1}, x_i)$ と仮定する。

$z(x) = (v - w)(x)\exp(\alpha x/2\varepsilon)$ とおくと、

$$z(p) = (v - w)(p)\exp(\alpha p/2\varepsilon) > 0$$

ここで $z(q) = \max_{x \in I_i} z(x) > 0$ と仮定すると、 $z'(q) = 0$ 、 $z''(q) < 0$

$$\begin{aligned} & \bar{L}(v - w)(x) \\ = & -\varepsilon(z'' + 2\frac{\alpha}{2\varepsilon}z' + \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2}z)\exp(-\alpha x/2\varepsilon) + \bar{a}(z' + \frac{\alpha}{2\varepsilon}z)\exp(-\alpha x/2\varepsilon) + \bar{b}z\exp(-\alpha x/2\varepsilon) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \bar{L}(v - w)(q) &= \{-\varepsilon z'' + (-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\alpha\bar{a}}{2\varepsilon} + \bar{b})z\}\exp(-\alpha q/2\varepsilon) \\ &\geq \{-\varepsilon z'' + (-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} + \beta)z\}\exp(-\alpha q/2\varepsilon) \quad (\bar{a} > \alpha > 0 \text{ より}) \\ &= \{-\varepsilon z'' + (\frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} + \beta)z\}\exp(-\alpha q/2\varepsilon) \\ &> 0 \quad (\alpha^2 + 4\varepsilon\beta > 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

よって $\bar{L}v > \bar{L}w$ となるのでこれは矛盾。よって $v \leq w \quad \text{in}[x_{i-1}, x_i]$ が成り立つ。(証明終)

このときこの定理を使えば次の評価が得られる

Theorem 3.5 (convection diffusion problem に対する誤差評価)

$S_h; \bar{L}$ -splines を基底とする trial space、 $T_h; \bar{L}^*$ -splines を基底とする test space として (2.6) に対する真の解 u と (2.16) から求まる有限要素近似解 $u_h \in S_h$ との L_∞ 誤差は次で評価できる。

$$\|u - u_h\|_\infty \leq C_4 h \|f\|_\infty \quad (3.34)$$

ただし C_4 は

$$C'_3 := \max \begin{cases} C_2 \\ \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha\beta}(\|a'\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty\|a'\|_\infty}{\alpha} + \|b'\|_\infty) \\ \frac{4\|a'\|_\infty\|a\|_\infty}{\alpha^3}(1 + \frac{\|b\|_\infty}{\alpha})\{1 - \exp(-\|a\|_\infty)\}^{-1} \end{cases}$$

とするとき

$$C_4 := 3C'_3$$

で定義する。

proof) まず (x_{i-1}, x_i) において

$$\begin{aligned}
\bar{L}(\pm(u - u_h)) &= \bar{L}(\pm u) - \bar{L}(\pm u_h) \\
&= \pm(-\varepsilon u'' + \bar{a}u' + \bar{b}u) \quad (\bar{L}\phi_i = 0 \text{ より } \bar{L}u_h = 0) \\
&= \pm\{-f + (\bar{a} - a)u' + (\bar{b} - b)u\} \\
&\leq \|f\|_\infty + \|\bar{a} - a\|_\infty |u'| + \|\bar{b} - b\|_\infty \|u\|_\infty \\
&\leq \|f\|_\infty + \|a'\|_\infty |u'|h + \|b'\|_\infty \|u\|_\infty h
\end{aligned}$$

$r(x) = C_3(x + h - x_{i-1}) + C_3 h \exp\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\bar{L}r(x) &= -\varepsilon C_3 h \left(\frac{-\alpha}{2\varepsilon}\right)^2 \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} + \bar{a}\{C_3 - C_3 h \left(\frac{-\alpha}{2\varepsilon}\right) \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\}\} \\
&\quad + \bar{b}C_3(x + h - x_{i-1}) + \bar{b}C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} \\
&= C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} \left\{-\left(\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}\right) + \frac{\alpha\bar{a}}{2\varepsilon} + \bar{b}\right\} + \bar{a}C_3 + \bar{b}C_3(x + h - x_{i-1}) \\
&\geq C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} \left\{\left(\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}\right) + \beta\right\} + \alpha C_3 + \bar{b}C_3(x + h - x_{i-1}) \\
&\quad (\bar{a} > \alpha > 0, \bar{b} > \beta > 0 \text{ より}) \\
&\geq C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} \lambda(4\varepsilon)^{-1} + \alpha C_3 + \beta C_3 h \\
&\quad (\alpha^2 + 4\varepsilon\beta = \lambda > 0 \text{ より}) \\
&\geq C_3 h \left[\exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} \alpha^2(4\varepsilon)^{-1} + \beta\right] + \alpha C_3 \\
&\quad (\alpha^2 + 4\varepsilon\beta \geq \alpha^2 \text{ より})
\end{aligned} \tag{3.35}$$

よって上の離散最大値原理を用いるためには、

$$\begin{cases} \bar{L}(\pm(u - u_h)) \leq \bar{L}r(x) \\ \pm(u - u_h)(x_{i-1}) \leq r(x_{i-1}) \\ \pm(u - u_h)(x_i) \leq r(x_i) \end{cases}$$

を満たせばよい。つまり

$$\|f\|_\infty + \|a'\|_\infty |u'|h + \|b'\|_\infty \|u\|_\infty h \leq C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} \lambda(4\varepsilon)^{-1} + \alpha C_3 + \beta C_3 h \tag{3.36}$$

$$C_2 h \|f\|_\infty \leq C_3(x_i + h - x_{i-1}) + C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x_i)\right\} \tag{3.37}$$

$$C_2 h \|f\|_\infty \leq C_3(x_{i-1} + h - x_{i-1}) + C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x_{i-1})\right\} \tag{3.38}$$

を全て満たす C_3 を求めればよい。まず (3.37)(3.38) 式については、

$$C_3(x_i + h - x_{i-1}) + C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x_{i-1})\right\} \geq 2C_3 h$$

$$C_3(x_{i-1} + h - x_{i-1}) + C_3 h \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x_i)\right\} \geq C_3 h$$

となる。よって、

$$C_2 h \|f\|_\infty \leq 2C_3 h$$

$$C_2 h \|f\|_\infty \leq C_3 h$$

を満たす C_3 のうち大きい方を取ればよいので

$$C_2 \|f\|_\infty \leq C_3 \quad (3.39)$$

であればよい。

次に (3.36) 式は (3.28) 式より

$$\begin{aligned} & \|f\|_\infty + \|a'\|_\infty |u'|h + \|b'\|_\infty \|u\|_\infty h \\ \leq & \|f\|_\infty + \|a'\|_\infty [\alpha^{-1} \|f - bu\|_\infty \\ & + \varepsilon^{-1} \|a\|_\infty \alpha^{-1} \|f - bu\|_\infty \{1 - \exp(-\varepsilon^{-1} \|a\|_\infty)\}^{-1} \exp\{-\varepsilon^{-1} \alpha(1 - x)\}]h + \|b'\|_\infty \|u\|_\infty h \end{aligned} \quad (3.40)$$

(3.35) 式と (3.40) 式を比較すると

$$\|f\|_\infty \leq \alpha C_3 \quad (3.41)$$

$$(\|a'\|_\infty \alpha^{-1} \|f - bu\|_\infty + \|b'\|_\infty \|u\|_\infty)h \leq \beta C_3 h \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \|a'\|_\infty \|a\|_\infty \alpha^{-1} \|f - bu\|_\infty \{1 - \exp(-\varepsilon^{-1} \|a\|_\infty)\}^{-1} \exp\{-\varepsilon^{-1} \alpha(1 - x)\}]h \\ \leq & \exp\left\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1 - x)\right\} \alpha^2 (4\varepsilon)^{-1} C_3 h \end{aligned} \quad (3.43)$$

の3つの式を満たすように C_3 を取ればよい。まず (3.41)(3.42) 式は

$$\frac{\|f\|_\infty}{\alpha} \leq C_3 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \|a'\|_\infty \alpha^{-1} \|f - bu\|_\infty + \|b'\|_\infty \|u\|_\infty \\ = & \frac{1}{\alpha\beta} (\|a'\|_\infty \|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty \|b\|_\infty \|a'\|_\infty}{\alpha} + \|b'\|_\infty \|f\|_\infty) \\ = & \frac{\|f\|_\infty}{\alpha\beta} (\|a'\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty \|a'\|_\infty}{\alpha} + \|b'\|_\infty) \leq C_3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

となる。また (3.42) 式は $\exp\{\frac{-\alpha}{\varepsilon}(1-x)\} \leq \exp\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1-x)\}$
 $\{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1} \leq \{1 - \exp(-\|a\|_\infty)\}^{-1}$ に注意すると、

$$\|a'\|_\infty \|a\|_\infty \alpha^{-1} \|f - bu\|_\infty \{1 - \exp(-\varepsilon^{-1}\|a\|_\infty)\}^{-1} \leq \alpha^2 4^{-1} C_3$$

であればよい。よって

$$\frac{4\|a'\|_\infty \|a\|_\infty \|f\|_\infty}{\alpha^3} (1 + \frac{\|b\|_\infty}{\alpha}) \{1 - \exp(-\|a\|_\infty)\}^{-1} \leq C_3 \quad (3.46)$$

を満たすように C_3 をとればよい。

よって (3.39)(3.44)(3.45)(3.46) 式をまとめると

$$C_3 = \max \left\{ \begin{array}{l} C_2 \|f\|_\infty \\ \frac{\|f\|_\infty}{\alpha} \\ \frac{\|f\|_\infty^\alpha}{\alpha\beta} (\|a'\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty \|a'\|_\infty}{\alpha} + \|b'\|_\infty) \\ \frac{4\|a'\|_\infty \|a\|_\infty \|f\|_\infty}{\alpha^3} (1 + \frac{\|b\|_\infty}{\alpha}) \{1 - \exp(-\|a\|_\infty)\}^{-1} \end{array} \right. \quad (3.47)$$

C_3 は $\|f\|_\infty$ が係数としてかかっているので

$$C'_3 = \max \left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha\beta} (\|a'\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty \|a'\|_\infty}{\alpha} + \|b'\|_\infty) \\ \frac{4\|a'\|_\infty \|a\|_\infty}{\alpha^3} (1 + \frac{\|b\|_\infty}{\alpha}) \{1 - \exp(-\|a\|_\infty)\}^{-1} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

ととれば離散最大値原理より、

$$\begin{aligned} \pm(u - u_h)(x) &\leq r(x) = C_3(x + h - x_{i-1}) + C_3 h \exp\{\frac{-\alpha}{2\varepsilon}(1-x)\} \\ &\leq 3C_3 h = 3C'_3 h \|f\|_\infty =: C_4 h \|f\|_\infty \end{aligned}$$

よって

$$\|u - u_h\|_\infty \leq C_4 h \|f\|_\infty \quad (3.49)$$

が成り立つ。(証明終)

特に a, b が正の定数の時は $\|a'\|_\infty = 0, \|b'\|_\infty = 0$ より

$$|(u - u_h)(x_i)| = 0$$

$$\|u - u_h\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty h$$

となる。

なお簡単な数値例を下の表であげておく。

表 1 (2.6) に対する Thm3.5 の $h = 0.001$ とした時の構成的誤差評価

$a(x) = 1 + x$	$a(x) = 2(1 + x^3)$
$b(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)$	$b(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)$
$0.0555\ f\ _\infty$	$0.0840\ f\ _\infty$

4 Reaction diffusion problem に対する a priori 誤差評価

次にこの章では reaction diffusion problem つまり一階微分項 u' がない場合の誤差評価を考える。(2.6) に対して $a = 0$ として

$$\begin{cases} Lu := -\varepsilon u'' + bu = f & x \in \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

ただし、 $\Omega = (0, 1)$ 、 $b(x), f(x) \in W_1^\infty(\Omega)$ 、 $b(x) \geq \beta > 0$
このとき双一次形式 $\hat{A}_h : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\hat{A}_h(u, v) = (\varepsilon u', v') + (\bar{b}u, v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.51)$$

と定義する。ただし $\bar{b}$ は前出と同じものとする。このとき (4.50) に対する離散 Petrov-Galerkin 法は次のようになる。

$$\hat{A}_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad u_h \in S_h \quad \forall v_h \in T_h \quad (4.52)$$

ただし S_h : 任意の trial space、 T_h : $\bar{L}$ -splines の ϕ_i を基底とする test space
 $a = 0$ なので $\bar{L}^*$ -splines と $\bar{L}$ -splines は同じ形になるのでここでは $\bar{L}$ -splines を基底としてよい。つまり $1 \leq i, j \leq (N - 1)$ に対して

$$\begin{cases} \bar{L}\phi_i = -\varepsilon\phi_i'' + \bar{b}\phi_i = 0 & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \phi_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \quad (4.53)$$

を基底として考える。さきほどの第 3 章と同様にして離散 Green's function を次で定義する。

Definition 4.1

$$\hat{A}_h(w, G_j) = w \quad \forall w \in H_0^1(0, 1) \quad (4.54)$$

ただし $G_j(x) := G(x, x_j)$ で次の4つの式を満たす。

$$-\varepsilon G_j'' + \bar{b} G_j = 0 \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.55)$$

$$G_j(x) \in C[0, 1] \quad (4.56)$$

$$G_j(0) = G_j(1) = 0 \quad (4.57)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} (-\varepsilon G_j') - \lim_{x \rightarrow x_i^-} (-\varepsilon G_j') = \delta_{ij} \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.58)$$

この Green's function を用いるとさきほどと同様にして格子点での誤差評価が求まる。

Theorem 4.2 (reaction diffusion problem に対する格子点誤差評価)

$\bar{b}$ は b の近似とする。このとき (4.50) に対して $\bar{L}$ -splines を基底とする test space が (4.52) の Petrov-Galerkin 法に用いられると、任意の trial space に対して次の格子点での誤差評価が得られる。

$$|(u - u_h)(x_i)| \leq C_5 h \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.59)$$

ただし

$$C_5 := \frac{1}{\beta^2} \|f\|_\infty \|b'\|_\infty$$

proof)

(4.54) 式の G_j の定義より $w = u - u_h$ とおくと

$$\begin{aligned} (u - u_h)(x_i) &= (\hat{A}_h)(u - u_h, G_i) \\ &= \hat{A}_h(u, G_i) - (f, G_i) - \{A(u, G_i) - (f, G_i)\} \\ &= (\hat{A}_h - a)(u, G_i) \\ &= ((\bar{b} - b)u, G_i) \end{aligned}$$

よって絶対値をとると

$$|(u - u_h)(x_i)| = |(u, (b - \bar{b})G_i)| \leq \|u\|_\infty \|b - \bar{b}\|_{L_1} \|G_i\|_\infty \quad (4.60)$$

となる。

$\|u\|_\infty$ については同様にして最大値原理を用いる。

$y = C\|f\|_\infty \pm u$ とおくと、

$$y(0) = C\|f\|_\infty \geq 0$$

$$y(1) = C\|f\|_\infty \geq 0$$

$$\begin{aligned} Ly &= bC\|f\|_\infty \pm f \\ &\geq \beta C\|f\|_\infty - f \end{aligned}$$

となり、 $C \geq \frac{1}{\beta}$ であれば $Ly \geq 0$ となり最大値原理を用いて $y \geq 0$ となる。よって

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_\infty \quad (4.61)$$

次に $\|G_j\| \leq C$ を示す。

まず (4.55) 式より $G_j \in T_h$ で ϕ_i の一次結合で書き表すことができるので α_k :unique constants を使って

$$G_j = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \phi_k \quad (4.62)$$

と書ける。次に G_j の定義式から $w = \phi_i$ とおけば、

$$\hat{A}_h(\phi_i, G_j) = \phi_i(x_j)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \hat{A}_h(\phi_i, \phi_k) = \delta_{ij} \quad i = 1, \dots, N-1$$

となる。このとき $\hat{A}_h$ について計算すると

$$\begin{aligned} \hat{A}_h(\phi_i, \phi_k) &= \varepsilon(\phi'_i, \phi'_k) + \bar{b}(\phi_i, \phi_k) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon[\phi_i \phi'_k]_{x_{j-1}}^{x_j} + (\phi_i, -\varepsilon \phi'_k + \bar{b} \phi_k) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon[\phi_i \phi'_k]_{x_{j-1}}^{x_j} \quad (-\varepsilon \phi'_k + \bar{b} \phi_k = 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

ここで $R_{i,k} = (\hat{A}_h(\phi_i, \phi_k)) : (N-1) \times (N-1)$ 行列 とおくと、

$$\begin{aligned} R_{j-1,j} &= \varepsilon[\phi_{j-1} \phi'_j]_{x_{j-1}}^{x_j} = (-\varepsilon \phi'_j)(x_{j-1}^+) \\ R_{j,j} &= \varepsilon[\phi_j \phi'_j]_{x_{j-1}}^{x_j} + \varepsilon[\phi_j \phi'_j]_{x_j}^{x_{j+1}} = (\varepsilon \phi'_j)(x_j^-) - (\varepsilon \phi'_j)(x_j^+) \\ R_{j+1,j} &= \varepsilon[\phi_{j+1} \phi'_j]_{x_j}^{x_{j+1}} = (\varepsilon \phi'_j)(x_{j+1}^-) \end{aligned}$$

という三対角行列となる。ここで、

$$R_{j-1,j} + R_{j,j} + R_{j+1,j} = (-\varepsilon \phi'_j)(x_{j-1}^+) + (\varepsilon \phi'_j)(x_j^-) - (\varepsilon \phi'_j)(x_j^+) + (\varepsilon \phi'_j)(x_{j+1}^-)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \{(\varepsilon \phi'_j)(x)\}' dx \\
&= \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \{(\varepsilon \phi''_j)(x)\} dx \\
&= \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \bar{b} \phi_j dx \\
&\geq \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \beta \phi_j dx \\
&\geq 0 \quad (\beta > 0 \text{ より})
\end{aligned}$$

また ϕ_j の形より $\phi'_j(x_{j-1}^+) \geq 0$ 、 $\phi'_j(x_{j+1}^-) \leq 0$ なので、

$$\begin{aligned}
R_{j-1,j} &= (-\varepsilon \phi'_j - \bar{a} \phi_j)(x_{j-1}^+) \\
&= -\phi'_j(x_{j-1}^+) \\
&\leq 0 \\
R_{j,j+1} &= (\varepsilon \phi'_j + \bar{a} \phi_j)(x_{j+1}^-) \phi'_j(x_{j+1}^-) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{N-1} |R_{j,i}| \leq R_{j,j}$$

が成り立つ。 R は既約優対角となり、Lemma 2.9 より R は正則で $R^{-1} \geq 0$ となる。また

$$\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \hat{A}_h(\phi_i, \phi_k) = \delta_{ij}$$

より $R(\alpha_k)_{k=1}^{N-1} \geq 0$ となり、 $(\alpha_k)_{k=1}^{N-1} \geq 0$ となる。よって (4.62) 式より $G_j \geq 0$ が成り立つ。
また、 $\varepsilon G''_j = \bar{b} G_j(t) dt$ なので

$$\int_0^x (\varepsilon G''_j) dt = \int_0^x \bar{b} G_j(t) dt$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^x (\varepsilon G''_j) dt &= \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varepsilon G''_j) dt + \int_{x_k}^x (\varepsilon G''_j) dt \\
&= \sum_{i=1}^k (\varepsilon G'_j)(x_i^-) - \sum_{i=1}^k (\varepsilon G'_j)(x_i^+) - (\varepsilon G'_j)(x_0) + (\varepsilon G'_j)(x) \\
&= -(\varepsilon G'_j)(0) + (\varepsilon G'_j)(x) - H_j(x) \\
&= \int_0^x \bar{b} G_j(t) dt
\end{aligned}$$

よって

$$\varepsilon G_j'(x) = \varepsilon G_j'(0) + \int_0^x \bar{b} G_j(t) dt - H_j(x)$$

$G_j(0) = 0$ で $G_j(x) \geq 0$ ならば $G_j'(0) \geq 0$ が成り立つ。今 $G_j > 1/\beta$ と仮定すると $x = 1$ において

$$\begin{aligned} \varepsilon G_j'(1) &= \varepsilon G_j'(0) + \int_0^1 \bar{b} G_j dt - H_j(1) \\ &> \beta(1/\beta) - 1 \quad (\bar{b} \geq \beta > 0 \text{ より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$G_j(1) = 0, G_j(x) \geq 0$ なので $G_j'(1) \leq 0$ が成り立つはずなのでこれは矛盾。
ゆえに

$$\|G_j\|_\infty \leq \frac{1}{\beta} \quad (4.63)$$

が成り立つ。

よって (4.60) 式にそれぞれ (4.61)(4.63)(3.33) 式を代入して

$$|(u - u_h)(x_i)| \leq \frac{h}{\beta^2} \|f\|_\infty \|b'\|_\infty =: C_5 h \quad (4.64)$$

が成り立つ。(証明終)

前章では $u - u_h$ を上から押さえ込むような r という関数を構成して (3.49) 式を求めたが、この場合はその方法が使えない(つまりそのような order h の r が求まらない) ので、ここで今求めた近似解 u_h を各小区間で再構成してそれを $\hat{u}_h$ とする。つまり

$$\begin{cases} -\varepsilon \hat{u}_h'' + \bar{b} \hat{u}_h = \bar{f}(x_i) \\ \hat{u}_h(x_{i-1}) = u_h(x_{i-1}) \\ \hat{u}_h(x_i) = u_h(x_i) \end{cases} \quad (4.65)$$

ただし $\bar{f}(x_i) = \{f(x_{i-1}) + f(x_i)\}/2$
このとき次の定理が成り立ちます。

Theorem 4.6

(4.52) で求めた近似解 u_h から新たに $\bar{u}_h \in S_h$ を各小区間で (4.65) のように定義する。このとき (4.50) の真の解 u と $\bar{u}_h$ との誤差は ε と h に独立な定数を用いて次で評価できる。

$$\|u - \bar{u}_h\|_\infty \leq C_6 h \quad (4.66)$$

ただし

$$C_6 := \max\left\{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}\|b'\|_\infty\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right), C_5\right\}$$

proof)

$$\begin{aligned}
\bar{L}(\pm(u - \hat{u}_h)) &= \pm(-\varepsilon u'' + \bar{b}u) \mp (-\varepsilon \hat{u}_h'' + \bar{b}u) \\
&= \pm(f - bu + \bar{b}u) \mp (\bar{f}) \\
&= \pm\{(\bar{b} - b)u + (f - \bar{f})\} \\
&\leq \|b'\|_\infty \|u\|_\infty h + \|f'\|_\infty h \quad ((3.32) \text{ と同様の評価と (3.33) 式より}) \\
&\leq \left(\frac{1}{\beta}\|b'\|_\infty \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)h \quad ((4.61) \text{ 式より})
\end{aligned}$$

ここで $\hat{r}(x) = C_6 h$ と定義する。このとき

$$\begin{aligned}
\pm(u - \hat{u}_h)(x_{i-1}) &= \pm(u(x_{i-1}) - u_h(x_{i-1})) \\
&\leq C_5 h \quad ((4.59) \text{ 式より}) \\
\pm(u - \hat{u}_h)(x_i) &= \pm(u(x_i) - u_h(x_i)) \\
&\leq C_5 h
\end{aligned}$$

また

$$\bar{L}\hat{r} = \bar{b}C_6 h \geq \beta C_6 h$$

となる。これらより $\hat{r}$ の C を

$$C_6 = \max\left\{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}\|b'\|_\infty \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right), C_5\right\} \quad (4.67)$$

とすると Theorem3.5 の離散最大値原理より

$$\|u - \hat{u}_h\|_\infty \leq C_6 h \quad (4.68)$$

が成り立つことが示せた。(証明終)

上の方法では $\|f'\|_\infty$ が評価に出てしまう。よって別の形で誤差の評価を行う。
いま特に b :定数とおくと、Thm4.2 より

$$u_h(x_i) = u(x_i) \quad 1 \leq i \leq N-1$$

であるから各小区間において

$$\begin{cases} -\varepsilon v'' + bv = f \\ v(x_{i-1}) = v(x_i) = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

となる v を直接評価することを試みる。ここで v は $x_{i-1} = 0$ 、 $x_i = h$ で考えれば十分で、このとき v にたいして次の性質が成り立つ。

Lemma 4.7

(4.69) の v を各小区間で直接評価すると次の式が成り立つ。

$$v(x) = \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \int_0^h \frac{1}{\tau \varepsilon} \sinh(\tau(h-t)) f(t) dt - \int_0^x \frac{1}{\tau \varepsilon} \sinh(\tau(x-t)) f(t) dt \quad (4.70)$$

ただし $\tau = \sqrt{\frac{b}{\varepsilon}}$ 、 $\sinh$ は hyperbolic sine とする。
proof)

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{\cosh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \int_0^h \frac{1}{\varepsilon} \sinh(\tau(h-t)) f(t) dt - \frac{1}{\tau \varepsilon} \sinh(\tau(x-x)) f(x) \\ &\quad - \int_0^x \frac{1}{\varepsilon} \sinh(\tau(x-t)) f(t) dt \\ &= \frac{\cosh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \int_0^h \frac{1}{\varepsilon} \sinh(\tau(h-t)) f(t) dt - \int_0^x \frac{1}{\varepsilon} \sinh(\tau(x-t)) f(t) dt \end{aligned}$$

$$v''(x) = \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \int_0^h \frac{\tau}{\varepsilon} \sinh(\tau(h-t)) f(t) dt - \frac{1}{\varepsilon} f(x) - \int_0^x \frac{\tau}{\varepsilon} \sinh(\tau(x-t)) f(t) dt$$

となる。よって

$$\begin{aligned} -\varepsilon v'' + bv &= -\varepsilon \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \int_0^h \frac{\tau}{\varepsilon} \sinh(\tau(h-t)) f(t) dt \\ &\quad + f(x) + \varepsilon \int_0^x \frac{\tau}{\varepsilon} \sinh(\tau(x-t)) f(t) dt \\ &\quad + b \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \int_0^h \frac{1}{\tau \varepsilon} \sinh(\tau(h-t)) f(t) dt - b \int_0^x \frac{1}{\tau \varepsilon} \sinh(\tau(x-t)) f(t) dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

なので (4.70) 式が成り立つ。(証明終)

ここで

$$T(x, t) = \begin{cases} \sinh(\tau(x-t)) & t < x \\ 0 & x \leq t \leq h \end{cases} \quad (4.71)$$

とおく。そうすると (4.70) 式は

$$v(x) = \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \int_0^h \frac{1}{\tau \varepsilon} \sinh(\tau(h-t)) f(t) dt - \int_0^h \frac{1}{\tau \varepsilon} T(x, t) f(t) dt$$

$$= \int_0^h \left\{ \frac{1}{\tau \varepsilon} \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) - T(x, t) \right\} f(t) dt \quad (4.72)$$

となる。(4.72) 式に対して両辺の L_∞ ノルムを取ると

$$\|v\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\tau \varepsilon} \int_0^h \left| \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) - T(x, t) \right| dt \quad (4.73)$$

が成り立つ。ここで (4.73) 式について

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left| \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) - T(x, t) \right| dt \\ &= \int_0^x \left| \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) - \sinh(\tau(x-t)) \right| dt + \int_x^h \left| \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) \right| dt \end{aligned}$$

となる。この第一項と第二項をそれぞれ計算する。まず第一項は

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) - \sinh(\tau(x-t)) \\ &= \frac{e^{\tau x} - e^{-\tau x}}{e^{\tau h} - e^{-\tau h}} \frac{e^{\tau(h-t)} - e^{-\tau(h-t)}}{2} - \frac{e^{\tau(x-t)} - e^{-\tau(x-t)}}{2} \\ &= \frac{(e^{\tau x} - e^{-\tau x})(e^{\tau(h-t)} - e^{-\tau(h-t)}) - (e^{\tau(x-t)} - e^{-\tau(x-t)})(e^{\tau h} - e^{-\tau h})}{2(e^{\tau h} - e^{-\tau h})} \\ &= \frac{e^{\tau(x-t+h)} - e^{-\tau(x-t-h)} - e^{\tau(x+t-h)} + e^{-\tau(x-t+h)}}{2(e^{\tau h} - e^{-\tau h})} \\ & \quad + \frac{-e^{\tau(x-t+h)} + e^{-\tau(x-t-h)} + e^{\tau(x-t-h)} - e^{-\tau(x-t+h)}}{2(e^{\tau h} - e^{-\tau h})} \\ &= \frac{e^{\tau(x-t-h)} - e^{-\tau(x+t-h)} + e^{-\tau(x-t-h)} - e^{-\tau(x+t-h)}}{2(e^{\tau h} - e^{-\tau h})} \\ &= \frac{e^{\tau t}(e^{-\tau(x-h)} - e^{\tau(x-h)}) + e^{-\tau t}(e^{\tau(x-h)} - e^{-\tau(x-h)})}{2(e^{\tau h} - e^{-\tau h})} \\ &= \frac{-e^{\tau t} \sinh(\tau(x-h)) + e^{-\tau t} \sinh(\tau(x-h))}{(e^{\tau h} - e^{-\tau h})} \\ &= \frac{-\sinh(\tau(x-h)) \sinh(\tau t)}{\sinh(\tau h)} \end{aligned}$$

ここで $0 \leq x \leq h$ 、 $0 \leq t \leq h$ より

$\sinh(\tau h) > 0$ 、 $\sinh(\tau t) \geq 0$ 、 $\sinh(\tau(x-h)) \leq 0$ なので、

$$\int_0^x \left| \frac{-\sinh(\tau(x-h)) \sinh(\tau t)}{\sinh(\tau h)} \right| dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \frac{-\sinh(\tau(x-h))\sinh(\tau t)}{\sinh(\tau h)} dt \\
&= \frac{-\sinh(\tau(x-h))}{\sinh(\tau h)} \frac{1}{\tau} [\cosh(\tau t)]_0^x \\
&= \frac{\sinh(\tau(x-h))}{\tau \sinh(\tau h)} \{1 - \cosh(\tau x)\}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

次に第二項は、

$$\sinh(\tau h) > 0, \sinh(\tau x) \geq 0, \sinh(\tau(h-t)) \geq 0$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}
&\int_x^h \left| \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) \right| dt \\
&= \int_x^h \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) dt \\
&= \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \frac{1}{\tau} [-\cosh(\tau(h-t))]_x^h \\
&= \frac{\sinh(\tau x)}{\tau \sinh(\tau h)} \{\cosh(\tau(h-x)) - 1\}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

となる。よって (4.74)(4.75) 式より

$$\begin{aligned}
&\int_0^h \left| \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-t)) - T(x, t) \right| dt \\
&= \frac{\sinh(\tau(x-h))}{\tau \sinh(\tau h)} \{1 - \cosh(\tau x)\} + \frac{\sinh(\tau x)}{\tau \sinh(\tau h)} \{\cosh(\tau(h-x)) - 1\} =: g(x)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

が成り立つ。ここで $g(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\cosh(\tau(x-h))}{\sinh(\tau h)} \{1 - \cosh(\tau x)\} - \frac{\sinh(\tau(x-h))}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau x) \\
&\quad + \frac{\cosh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \{\cosh(\tau(h-x)) - 1\} - \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau h)} \sinh(\tau(h-x)) \\
&= \frac{\cosh(\tau(x-h)) - \cosh(\tau x)}{\sinh(\tau h)}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$(\sinh(x) = -\sinh(-x), \cosh(x) = \cosh(-x) \text{ より})$$

よって (4.77) 式より $x-h = x$ または $-x+h = x$ のとき $g'(x) = 0$ をとる。

また $g(0) = 0$ 、 $g(h) = 0$ 、 $g(x) \geq 0$ より $x = \frac{h}{2}$ の時最大値をとる。よって

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{h}{2}\right) &= \frac{2\sinh\left(\frac{\tau h}{2}\right)}{\tau\sinh(\tau h)} \left\{ \cosh\left(\frac{\tau h}{2}\right) - 1 \right\} \\
&= \frac{2}{\tau} \left\{ \frac{(e^{\frac{\tau h}{2}} - e^{-\frac{\tau h}{2}})}{e^{\tau h} - e^{-\tau h}} \left(\frac{e^{\frac{\tau h}{2}} + e^{-\frac{\tau h}{2}}}{2} - 1 \right) \right\} \\
&= \frac{2}{\tau} \left\{ \left(\frac{1}{e^{\frac{\tau h}{2}} + e^{-\frac{\tau h}{2}}} \right) \left(\frac{e^{\frac{\tau h}{2}} + e^{-\frac{\tau h}{2}}}{2} - 2 \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{e^{-\frac{\tau h}{2}} (e^{\frac{\tau h}{2}} + e^{-\frac{\tau h}{2}} - 2)}{e^{-\frac{\tau h}{2}} (e^{\frac{\tau h}{2}} + e^{-\frac{\tau h}{2}})} \right\} \\
&= \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{(1 + e^{-\tau h} - 2e^{-\frac{\tau h}{2}})}{(1 + e^{-\tau h})} \right\} \\
&= \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{(e^{-\frac{\tau h}{2}} - 1)^2}{(1 + e^{-\tau h})} \right\}
\end{aligned}$$

よって

$$\|v\|_{\infty} \leq \frac{(e^{-\frac{\tau h}{2}} - 1)^2}{b(1 + e^{-\tau h})} \|f\|_{\infty} =: C_7(h, \varepsilon) \|f\|_{\infty} \quad (4.78)$$

という評価が得ることができる。ここで $h \rightarrow 0$ のとき $C_7(h, \varepsilon) \rightarrow 0$ に注意。例えば

$b = 0.1$ 、 $\varepsilon = 1.0e - 5$ 、 $h = 1/1000$ の時

$$g\left(\frac{h}{2}\right) = 0.00001248699239110984, \quad \|v\|_{\infty} \leq 0.01248699239110984474 \|f\|_{\infty}$$

$b = 0.1$ 、 $\varepsilon = 1.0e - 6$ 、 $h = 1/1000$ の時

$$g\left(\frac{h}{2}\right) = 0.00003912086001733173, \quad \|v\|_{\infty} \leq 0.12371102167938248517 \|f\|_{\infty}$$

となる。

以上の結果から次の形の ε に依存する構成的誤差評価を得ることができる。

Lemma 4.8

(4.50) で b :定数とした reaction diffusion problem に対して trial space、test space を $\bar{L}$ -splines を基底とした (4.52) の Petrov-Galerkin 法の近似解 u_h と真の解 u との誤差は次で評価できる。

$$\|u - u_h\|_{\infty} \leq C_7(h, \varepsilon) \|f\|_{\infty} \quad (4.79)$$

ここで

$$C_7(h, \varepsilon) = \frac{(e^{-\frac{\tau h}{2}} - 1)^2}{b(1 + e^{-\tau h})}$$

で定義し ε を固定した時 $h \rightarrow 0$ のとき $C_7(h, \varepsilon) \rightarrow 0$ となる定数。

下の表に lemma4.6 と lemma4.8 の b が定数の場合の数値例の比較を書いておく。

表 2 (4.50) に対する lemma4.6 と lemma4.8 の $b = 0.1$, $h = 0.001$ の時の構成的誤差評価の比較

	$\varepsilon = 1.0e - 5$	$\varepsilon = 1.0e - 6$
lemma4.6	$0.01000\ f'\ _\infty$	$0.01000\ f'\ _\infty$
lemma4.8	$0.01249\ f\ _\infty$	$0.12371\ f\ _\infty$

表 3 (4.50) に対する lemma4.6 と lemma4.8 の $b = 0.1$, $h = 0.0001$ の時の構成的誤差評価の比較

	$\varepsilon = 1.0e - 5$	$\varepsilon = 1.0e - 6$
lemma4.6	$0.00100\ f'\ _\infty$	$0.00100\ f'\ _\infty$
lemma4.8	$0.00012\ f\ _\infty$	$0.00124\ f\ _\infty$

5 まとめと今後の課題

- convection diffusion problem に対して $\bar{L}$ -splines を基底とした有限要素法によりオーダー h の構成的 a priori 誤差評価を求めることができた。
- 今後の課題として (1,1) の右辺 $f(x)$ を u の非線形関数で書き換えた形の非線形特異摂動問題に対する精度保証付き数値計算に適用していく。
- reaction diffusion problem に対してもオーダー h の誤差評価を求めることはできた。
- ただし reaction diffusion problem の場合は誤差評価に $\|f'\|_\infty$ が入るので非線形問題に対しては適用が困難である。今後は reaction diffusion problem に対して非線形問題に適用できるような手法を検討していく。

参考文献

- [1] P.A.Farrel,A.F.Hegarty,J.J.H.Miller,E.O'Riordan,G.I..Shishkin:Robust Computational Techniquis for Boundary Layer
- [2] H.G.Roos,M.Stynes,L.Tobaska:Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations(Springer)
- [3] M.Stynes,E.O'Riordan:An analysis of a singularly perturbed two-point boundary value problem using only finite element techniques.Math.Comp.56(1991),663–775
- [4] M.Stynes,E.O'Riordan:A finite method for a singularly perturbed boundary value problem.Numer.Math.50(1–15)
- [5] E.O'Riordan,M.Stynes:Analysis a superconvergence result for a singularly perturbed boundary value problem.Math.Comp.46(1986),81–92
- [6] 中尾充宏, 山本野人:精度保証付き数値計算 (日本評論社)