

修士論文

題目 楕円型作用素の可逆性の数値的検証法について

氏名 尾方 晋太郎

九州大学大学院数理学府 数理学専攻 計算数理論座

指導教官 中尾 充宏教授

平成 15 年 1 月 31 日

目 次

1	Introduction	1
2	楕円型作用素の絶対値最小固有値の精度保証	2
3	線形化逆作用素の直接評価	6
4	モデル問題と数値計算	13
5	今後の課題とまとめ	19

1 Introduction

この論文は、次の線形楕円型問題：

$$\begin{aligned} Lu &\equiv -\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = g & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

の可解性（即ち、 L の可逆性）についての研究である。但し、 $g \in L^2(\Omega)$, $b \in (L^\infty(\Omega))^n$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $(n = 1, 2, 3)$ として、領域 Ω は R^n ($n = 1, 2, 3$) の凸領域で、 $\partial\Omega$ は区分的に滑らかとする。

方程式 (1.1) は、次の非線形楕円型問題：

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x; u, \nabla u) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

の解の存在性や局所一意性を示す場合に重要な役割を果たすことになる。

方程式 (1.2) の解の存在や局所一意性を示す方法に、中尾の方法 [1] や Plum の方法 [4] などがある。Plum の方法では検証の際、(1.2) の線形化作用素の絶対値最小固有値を厳密に評価しなければならない。つまりそれは、線形化作用素が zero 固有値を持たないこと（可逆性）を検証することでもある。しかし、一般に非自己共役な問題では線形化作用素は複素固有値を持つ為に、共役作用素を作用させるなどそのアルゴリズムは非常に複雑となる。一方、中尾の方法では問題を有限次元の近似空間 S_h と無限次元部分とに分けるというものであり、有限次元部分では Newton 型の反復を用い、無限次元部分では既知の誤差評価を用いて検証を行うため、本質的な困難性が増大することはない。

一般に、非自己共役な問題の難しさはその非対称性である。しかし、中尾の方法を用いることにより非対称性の本質的影響を有限次元部分（行列固有値問題）に帰着させることができれば、(1.2) の検証はより簡単なものとなることが予想される。

この論文では、この中尾の方法のアイデアとその改良を基にして、(1.2) の解の数値的検証を行う為に (1.1) の可逆性ならびにその線形化作用素の逆作用素ノルムを評価していく。

以下に、主に使用する記号について定義する。

整数 k に対して、オーダー k の Sobolev 空間を $H^k(\Omega)$ と書き、 Ω 上の L^2 内積 $(\cdot, \cdot)$ を

$$(u, v) \equiv \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

と定義する。また、 $H_0^1(\Omega)$ を

$$H_0^1(\Omega) \equiv \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

として、 $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ 上のノルム、 $H^2(\Omega)$ 上のセミノルムを、それぞれ

$$\begin{aligned} \|q\|_{L^2} &= (q, q)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v\|_{H_0^1} &= \|\nabla v\|_{L^2} = (\nabla v, \nabla v)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u\|_{H^2} &= \left(\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

で定める．また，有限次元空間 S_h を，分割幅により決まる定数 h に依存する $H_0^1(\Omega)$ の有限次元部分空間としてとり，その次元を $\dim S_h = N$ とする．また， S_h の基底を $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N}$ とおく．

定義 1 H_0^1 -projection $P_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow S_h \subset H_0^1(\Omega)$ を

$$(\nabla(v - P_h v), \nabla \phi) = 0 \quad \forall \phi \in S_h$$

によって定める．

ここで， S_h, P_h は次を満たすものと仮定しておく．

命題 1 任意の $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1} \leq C_0 h \|u\|_{H^2}$$

が成り立つ．ここに， C_0 は h に依存しない数値的に算定可能な正定数である．

例えば Ω が矩形領域で，区分双 1 次形式または 2 次形式で S_h を構成する場合，この定数はそれぞれ $C_0 = 1/\pi$ または $C_0 = 1/2\pi$ なることが知られている．また，集合の包含関係 $A \overset{\circ}{\subset} B$ を， $\bar{A} \subset \overset{\circ}{B}$ の意味として定義しておく．

2 楕円型作用素の絶対値最小固有値の精度保証

Plum の方法は，楕円型（問題の線形化）作用素の絶対値最小固有値が求まれば (1.2) の解の存在性の検証ができるというものである．この方法の詳細については [4] を参照されたい．但し，このような最小固有値を求めることは一般に非常に面倒な計算を要する．しかしながら，長籐らは [3] において特に自己共役固有値問題（(1.1) の L で， $b = 0$ の部分）については楕円型作用素の絶対値最小固有値を精度保証付き数値計算で求めることを提案した．そこで，この章では彼らの方法について紹介しておく．

次の自己共役な固有値問題を考える．

$$\begin{aligned} -\Delta u + qu &= \lambda u & \text{in } \Omega \\ u &= 0. & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

但し， $q \in L^\infty(\Omega)$ とする．最初に，最小固有値が負であるものとして十分に狭い区間 $\Lambda_i = [a_i, a_{i-1}]$ を考える（図 1 (a)）．但し， $a_0 = 0$ ， $a_i < 0$ ($i \geq 1$) とする．そして固定した i と $\lambda \in \Lambda_i$ に対し，作用素 L_λ を

$$L_\lambda u \equiv -\Delta u + (q - \lambda)u$$

と定めると，次の固有値問題:

$$\begin{aligned} L_\lambda u &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

は自明な解 $u = 0$ を持つことが分かる．

よって，任意の固有値 $\lambda \in \Lambda_i$ に対しても (2.2) の（自明な）解の一意性を以下に述べるような方法を用いて検証できれば， λ は (2.2) の固有値でない．すなわち， Λ_i 内に (2.2) の固有値が

存在しないことが分かる．また，区間 Λ_i を i の小さい順に検証し，一意性の検証ができない Λ_i が見つかった場合，負の方向に対する最小固有値の下限を検証が成功した一つ前の区間を用いて $\lambda^* \equiv \inf \Lambda_{i-1}$ とするのである（図 1 (b)）．

同様に正の方向についても検証する．得られた（一意性が検証できなくなった）区間 $\Gamma_i = (a_i, a_{i+1})$ により，正の方向に対する最小固有値の下限 $\lambda^{**} \equiv \sup \Gamma_{k-1}$ （図 1 (c)）を与え， λ^* と絶対値の比較をすることにより (2.2) の絶対値最小固有値の下限を検証することができる．

但し，最初の区間 Λ_1 で検証できない場合には最小固有値を検証することができない．また，十分に小さい Λ_1 を用いても検証できない場合には，作用素が zero 固有値を持っている可能性があることに注意しなければならない．

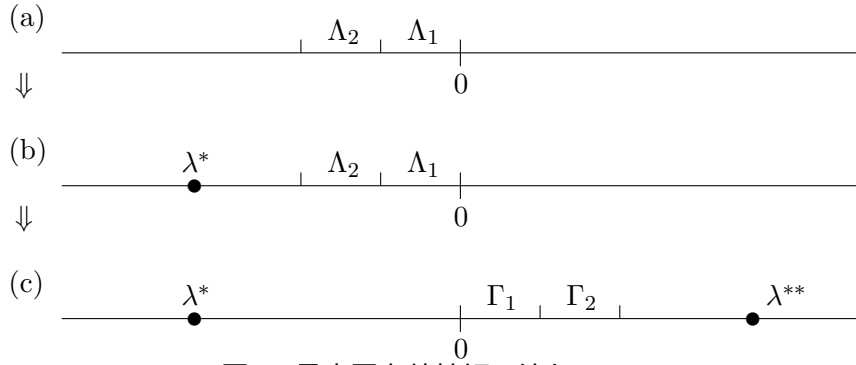


図 1: 最小固有値検証の流れ

以下に，解の一意性を示す方法を紹介する．

固定した $\lambda \in \Lambda_i$ に対する次の楕円型境界値問題 $L_\lambda u = 0$ を考える．

$$\begin{aligned} -\Delta u &= (\lambda - q)u & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

今， $H_0^1(\Omega)$ 上のコンパクト作用素:

$$F_\lambda u \equiv (-\Delta)^{-1}(\lambda - q)u \quad (2.4)$$

を用いて，(2.3) は次のように不動点形式化できる．

$$F_\lambda u = u \quad (2.5)$$

この時，

$$\begin{aligned} (N_{h_0})_\lambda u &\equiv P_{h_0} u - [I - F_\lambda]_{h_0}^{-1}(P_{h_0} u - P_{h_0} F_\lambda u), \\ T_\lambda u &\equiv (N_{h_0})_\lambda u + (I - P_{h_0})F_\lambda u \end{aligned}$$

のように作用素 T を定めると，次の補題を導く．但し，作用素 $[I - F_\lambda]_{h_0}^{-1}$ は， $P_{h_0}(I - F_\lambda)|_{S_h} : S_h \rightarrow S_h$ の逆作用素である．

補題 2.1

$$F_\lambda u = u \iff T_\lambda u = u.$$

証明：最初に $F_\lambda u = u$ を仮定する． T_λ の定義より

$$\begin{aligned} T_\lambda u &= P_{h_0} u - [I - F_\lambda]_{h_0}^{-1} (P_{h_0} u - P_{h_0} F_\lambda u) + (I - P_{h_0}) F_\lambda u \\ &= P_{h_0} u + (I - P_{h_0}) u = u \end{aligned}$$

よって $T_\lambda u = u$ を導ける．

次に $T_\lambda u = u$ と仮定する．

$$u = P_{h_0} u - [I - F_\lambda]_{h_0}^{-1} (P_{h_0} u - P_{h_0} F_\lambda u) + (I - P_{h_0}) F_\lambda u$$

両辺に $P_{h_0}, (I - P_{h_0})$ を作用させるとそれぞれ $P_{h_0} u = P_{h_0} F_\lambda u, (I - P_{h_0}) u = (I - P_{h_0}) F_\lambda u$ を導ける．ゆえに $u = F_\lambda u$ が言える． ♠

以上より，任意の $\lambda \in \Lambda_i$ に対して $T_\lambda U \overset{\circ}{\subset} U$ となる有界凸閉集合 U が得られれば，以下に述べる定理 2.1 から $T_\lambda u = u$ となる $u \in U$ の存在が言えるので，最終的に $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_i} T_\lambda U \overset{\circ}{\subset} U$ を検証すれば線形化作用素の絶対値最小固有値の精度保証ができることになる．

そこで，候補者集合（解の存在を期待する集合）を次により定める．

$$\begin{aligned} U_h &= \left\{ v_h = \sum_{i=1}^N B_i^{(0)} \phi_i : B_i^{(0)} = [-W_i, W_i], W_i > 0 \right\}, \\ U_\perp &= \left\{ \psi \in S_h^\perp : \|\psi\|_{H_0^1} \leq \alpha_0 \right\}, \\ U &\equiv U_h + U_\perp. \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで定めた $U_h, U_\perp$ はそれぞれ有限次元，無限次元候補者集合と呼ばれる．

定理 2.1 (2.6) の $U = U_h + U_\perp$ に対して，

$$\begin{aligned} (N_{h_0})_\lambda U &\overset{\circ}{\subset} U_h \\ (I - P_{h_0}) F_\lambda U &\overset{\circ}{\subset} U_\perp \end{aligned} \tag{2.7}$$

が成り立つならば， $T_\lambda \bar{u} = \bar{u}$ なる $\bar{u}$ が U の中に一意に存在する．

次に，区間ベクトル $B \equiv (B_i)_{1 \leq i \leq N}$ と実数 α を

$$\begin{aligned} (N_{h_0})_\lambda U &\subset \sum_{i=1}^N B_i \phi_i, \\ \alpha &\equiv C_0 h \sup_{r \in U} \|(\lambda - q)v\|_{L^2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

により定めると，定理 2.1 の十分条件として次が得られる．

$$\begin{aligned} B &\overset{\circ}{\subset} B_0, \\ \alpha &< \alpha_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

故に，(2.7) の代わりに (2.9) を検証すればよいことになる．

更に，(2.9) の検証の手順について考える．

最初に， $v = v_h + v_\perp \in U_h + U_\perp$ に対して，

$$\begin{aligned} (N_{h_0})_\lambda v &= (N_{h_0})_\lambda (v_h + v_\perp) \\ &= P_{h_0} (v_h + v_\perp) - [I - F_\lambda]_h^{-1} (P_{h_0} (v_h + v_\perp) - P_{h_0} F_\lambda (v_h + v_\perp)) \\ &= v_h - [I - F_\lambda]_h^{-1} (v_h - P_{h_0} F_\lambda (v_h + v_\perp)) \end{aligned}$$

を得る．そこで，この両辺に $[I - F_\lambda]_h^{-1}$ を作用させると次を得る．

$$\begin{aligned} [I - F_\lambda]_{h_0}(N_{h_0})_\lambda v &= [I - F_\lambda]_{h_0} v_h - (v_h - P_{h_0} F_\lambda(v_h + v_\perp)) \\ &= P_{h_0} F_\lambda(v_h + v_\perp) - P_{h_0} F_\lambda(v_h) \\ &= P_{h_0} F_\lambda(v_\perp). \end{aligned}$$

従って，区間ベクトル B を計算する為に集合 X を

$$X \equiv \{x \in S_h : (\nabla[I - F_\lambda]_{h_0} x, \nabla\phi_j) = (\nabla P_{h_0} F_\lambda(v_\perp), \nabla\phi_j), \quad \forall v_\perp \in U_\perp, \forall \phi_j \in S_h\}$$

とすれば，(2.8) の前半を満たすように B を定めることができる．ここに，集合 X は連立方程式 $(\nabla[I - F_\lambda]_{h_0} x, \nabla\phi_j) = (\nabla P_{h_0} F_\lambda(v_\perp), \nabla\phi_j)$ を解くことにより X の interval hull $\hat{X}$ として得ることができ，ここでは

$$\hat{X} \equiv \sum_{i=1}^N B_i \phi_i$$

と定めることにする．

実際の計算では， $N \times N$ 区間行列 $G = (G_{ij})$ と区間ベクトル $\mathbf{r}$ を

$$G_{ij} \equiv (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + (q\phi_i, \phi_j) - \lambda(\phi_i, \phi_j),$$

$$\mathbf{r} \equiv ([-r_i, r_i]), \quad r_i \equiv C_0 h \|(\lambda - q)\phi_i\|_{L^2}$$

($1 \leq i, j \leq N$) で定義すると，区間ベクトル B は

$$B = \alpha_0 G^{-1} \mathbf{r}$$

で決定される．また，(2.8) の後半部分の α については三角不等式などを用いて次のように評価される．

$$\begin{aligned} \alpha &= C_0 h \sup_{v \in U} \|(\lambda - q)v\|_{L^2} \\ &\leq C_0 h \left\{ \sup_{v_h \in U_h} \|(\lambda - q)v_h\|_{L^2} + \sup_{v_\perp \in U_\perp} \|(\lambda - q)v_\perp\|_{L^2} \right\} \\ &\leq C_0 h \sup_{v_h \in U_h} \|(\lambda - q)v_h\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \alpha_0 \|\lambda - q\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

この時，以下の定理が成り立つ．

定理 2.2 検証条件 (2.9) は，以下の不等式と同値である．

$$C_0 h \sup_{z \in G^{-1} \mathbf{r}} \|(\lambda - q)\Phi^t \cdot z\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \|\lambda - q\|_{L^\infty} < 1. \tag{2.11}$$

但し， $\Phi \equiv (\phi_i)_{i=1}^N$ である．

証明：最初に，(2.9) が成り立つと仮定する．これは書き換えると，

$$\begin{aligned} \alpha_0 G^{-1} \mathbf{r} &\stackrel{\circ}{\subset} B_0, \\ C_0 h \sup_{B_0 \in B_0} \|(\lambda - q)\Phi^t \cdot B_0\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \alpha_0 \|\lambda - q\|_\infty &< \alpha_0 \end{aligned}$$

したがって、次式から (2.11) が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &> C_0 h \sup_{B_0 \in B_0} \|(\lambda - q)\Phi^t \cdot B_0\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \alpha_0 \|\lambda - q\|_\infty \\
&> C_0 h \sup_{z \in G^{-1}\mathbf{r}} \|(\lambda - q)\Phi^t \cdot \alpha_0 z\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \alpha_0 \|\lambda - q\|_\infty \\
&= \alpha_0 (C_0 h \sup_{z \in G^{-1}\mathbf{r}} \|(\lambda q)\Phi^t \cdot z\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \|\lambda - q\|_\infty).
\end{aligned}$$

次に (2.11) が成り立つと仮定する。この時、 $\varepsilon \equiv 1 - C_0 h \sup_{z \in G^{-1}\mathbf{r}} \|(\lambda q)\Phi^t \cdot z\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \|\lambda - q\|_\infty$ と定義すれば、(2.11) より $\varepsilon > 0$ を得る。そこで、区間ベクトル B_0 を次で定義する。

$$b_0 \equiv \frac{\varepsilon}{\xi(M+1)C_0 h \|\lambda - q\|_\infty} [1].$$

但し、 $[1] \equiv ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^t$, $\xi \equiv \max_i \|\phi_i\|_{L^2}$ とする。

ここで $B_0 \equiv \alpha_0 G^{-1}\mathbf{r} + \alpha_0 b_0$ とおくと、 $\alpha_0 G^{-1}\mathbf{r} \overset{\circ}{\subset} B_0$ より $B \overset{\circ}{\subset} B_0$ は自明であり、また、 α についても (2.11) より

$$C_0 h \sup_{B_0 \in B_0} \|(\lambda - q)\Phi^t \cdot B_0\|_{L^2} + C_0^2 h^2 \|\lambda - q\|_\infty < 1$$

となる。従って、(2.10) より $\alpha < \alpha_0$ となることから定理が導けた。 ♠

以上より、任意の $\lambda \in \Lambda_i$ に対して (2.11) を検証することで、区間 Λ_i は固有値を含まないことを示せる。これは、区間演算により実現されるものである。

3 線形化逆作用素の直接評価

前節は自己共役問題についての結果であるが、これを非自己共役問題に用いるといくつかの問題が生じることがわかった。具体的には、先の問題では検証条件 (2.9) の計算時の区間ベクトル B を $O(h)$ のベクトルとして構成できた。しかし非自己共役問題の場合、微分項 ∇u の影響でこのオーダーが見込めずに、分割幅 h をどんなに小さくしても検証がうまくいかないことが起こりうる。また、 ∇u があるため複素固有値を考慮する必要があるなど候補者集合の定め方も変える必要がある。

そこでこの章では、最小固有値を用いての数値的検証法ではなく、(1.1) の可逆性ならびにその線形化作用素の逆作用素ノルムを直接評価する。

今、(1.1) 式

$$Lu \equiv -\Delta u + b \cdot \nabla u + cu. \quad (3.1)$$

に対して、 L の可逆性の検証アルゴリズムを示そう。

L が可逆であるとは、「 $Lu = 0 \implies u = 0$ 」である。そこで、 $Lu = 0$ を不動点形式に

$$\begin{aligned}
Lu = 0 &\iff u = (-\Delta)^{-1}(b \cdot \nabla u + cu) \\
&=: Au.
\end{aligned} \quad (3.2)$$

と表す。ゆえに、(3.2) の不動点 u が $u = 0$ と一意に定まることを示せば L の可逆性を検証できる。ここに、 $A: H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ はコンパクトであり、また、 A は積分作用素を意味している。

そこで，命題 1 により定義 1 で定めた H_0^1 -projection P_h は $O(h)$ の近似性を持つことになることから，中尾の方法に即して不動点方程式 $u = Au$ を有限次元部分空間と，その誤差空間（直交補空間）との不動点方程式に分解して，それぞれにおいて考えて行けばよい．

次に，行列 $G = (G_{i,j})$ と $D = (D_{i,j})$ をそれぞれ次により定義する．

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) + (b \cdot \nabla \phi_i, \phi_j) + (c \phi_i, \phi_j), \\ D_{i,j} &= (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j). \end{aligned}$$

このとき，行列 D は明らかに正定値対称行列である．

定理 3.1 (3.1) で定義された線形楕円型作用素 L に対して，

$$C_0 h (C_3 M (C_1 + C_2 h) + C_4) < 1$$

ならば， L は可逆である．ここに， $M = \|L^T G^{-1} L\|_E$ であり，定数 C_0 は命題 1 と同じもので，定数 C_i ($1 \leq i \leq 4$) は次で定まるものである．

$$\begin{aligned} C_b &= \|b\|_{L^\infty}, & C_1 &= C_b C_p, & C_3 &= C_b + C_c C_p, \\ C_c &= \|c\|_{L^\infty}, & C_2 &= C_0 C_c C_p, & C_4 &= C_b + C_0 C_c h. \end{aligned}$$

但し， C_p は任意の $\phi \in H_0^1(\Omega)$ に対して $\|\phi\|_{L^2} \leq C_p \|\phi\|_{H_0^1}$ を満たす Poincaré 定数，上三角行列 L は D の Cholesky 分解: $D = LL^T$ であり， $\|\cdot\|_E$ は R^N の Euclidean ノルムに対応する行列ノルムを意味する．

証明：(3.2) において，不動点方程式 $u = Au$ を分解して，

$$\begin{aligned} P_h u &= P_h A u, \\ (I - P_h) u &= (I - P_h) A u \end{aligned}$$

とする．ここで，有限次元部分 $P_h u = P_h A u$ を Newton 型の反復によって

$$N_h(u) \equiv P_h u - [I - A]_h^{-1} P_h (I - A) u$$

と書き換え，

$$T u \equiv N_h(u) + (I - P_h) A u$$

のように作用素 T を定める．

(3.1) は，非自己共役作用素について考えているので前述したように微分項の影響に注意しなければならない．そこで，候補者集合は前章とは多少異なり次のように有限次元部分を zero 中心のノルムでとったものを考える．

$$\begin{aligned} W_h &= \left\{ \phi_h \in S_h : \|\phi_h\|_{H_0^1} \leq \gamma \right\}, \\ [\alpha] &= \left\{ \phi \in S_\perp : \|\phi\|_{H_0^1} \leq \alpha, \quad \|\phi\|_{L^2} \leq C_0 h \alpha \right\}, \\ W &\equiv W_h + [\alpha]. \end{aligned}$$

この時 W は 0 中心の H_0^1 -近傍となり，また，補題 2.1 と同様に $u = Au \Leftrightarrow u = Tu$ が成り立つので， $TW \overset{\circ}{\subset} W$ を検証すればよい．

そこで, $TW \overset{\circ}{\subset} W$ の十分条件は,

$$\left\{ \begin{array}{l} N_h(W) \overset{\circ}{\subset} W_h \\ (I - P_h)AW \overset{\circ}{\subset} [\alpha] \end{array} \right\} \implies TW \overset{\circ}{\subset} W \quad (3.3)$$

となることから, 更に (3.3) の十分条件を考えると次を得る.

$$\|N_h(W)\|_{H_0^1} = \sup_{\phi \in W} \|N_h\phi\|_{H_0^1} < \gamma, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \|(I - P_h)A\phi\|_{H_0^1} &= \inf_{\chi \in S_h} \|A\phi - \chi\|_{H_0^1} \\ &\leq C_0 h |A\phi|_{H^2} \\ &\leq C_0 h \|b \cdot \nabla \phi + c\phi\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{\phi \in W} C_0 h \|b \cdot \nabla \phi + c\phi\|_{L^2} < \alpha. \end{aligned} \quad (3.5)$$

従って, (3.4)-(3.5) それぞれ評価していくことにする.

はじめに, $\|N_h(W)\|_{H_0^1}$ を評価する.

任意の $\phi = \phi_h + \hat{\alpha} \in W_h + [\alpha]$ に対して, $\psi_h := N_h(\phi) = N_h(\phi_h + \hat{\alpha})$ とすると,

$$\begin{aligned} \psi_h &= N_h(\phi_h + \hat{\alpha}) \\ &= P_h(\phi_h + \hat{\alpha}) + [I - A]_h^{-1} P_h(I - A)(\phi_h + \hat{\alpha}) \\ &= \phi_h - [I - A]_h^{-1} P_h(I - A)(\phi_h + \hat{\alpha}). \end{aligned}$$

となることから, これをまとめると次を得る.

$$\psi_h = [I - A]_h^{-1} P_h A \hat{\alpha}. \quad (3.6)$$

今, $P_h A \hat{\alpha}$ は S_h の元であるので $v_h := P_h A \hat{\alpha} \in S_h$ とすると, 定義 1 より ψ_h は次の弱形式の解となる.

$$(\nabla \psi_h, \nabla \phi_h) + (b \cdot \nabla \psi_h, \phi_h) + (c \psi_h, \phi_h) = (\nabla v_h, \nabla \phi_h), \quad \forall \phi_h \in S_h. \quad (3.7)$$

そこで, ψ_h, v_h を, S_h の基底 $\{\phi_i\}$ を用いて,

$$\psi_h := \sum_{i=1}^N w_i \phi_i = \vec{w}^T \vec{\phi}, \quad v_h := \sum_{i=1}^N v_i \phi_i = \vec{v}^T \vec{\phi}$$

と表すと, これを (3.7) に代入することにより次の連立方程式を得る. 但し, $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^T$ であり, $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ はそれぞれ ψ_h, v_h の係数ベクトルである.

$$\mathbf{G} \vec{w} = \mathbf{D} \vec{v}.$$

ゆえに, $\|\psi_h\|_{H_0^1}^2 = \vec{w}^T \mathbf{D} \vec{w}$ であり, $\mathbf{D} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$ と (Cholesky) 分解できることから

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_{H_0^1}^2 &= \vec{w}^T \mathbf{D} \vec{w} \\ &= \vec{w}^T \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D} \vec{v} \\ &= (\mathbf{L}^T \vec{w})^T (\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}) (\mathbf{L}^T \vec{v}) \\ &\leq \|\mathbf{L}^T \vec{w}\|_E \|\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}\|_E \|\mathbf{L}^T \vec{v}\|_E \\ &= \|\psi_h\|_{H_0^1} \|\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}\|_E \|v_h\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

を導くので, $M \equiv \|\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}\|_E$ と定めて $v_h = P_h A \hat{\alpha}$ を代入すると次の評価式を得る.

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_{H_0^1} &\leq M \|P_h A \hat{\alpha}\|_{H_0^1} \\ &= M \|P_h (-\Delta)^{-1} (b \cdot \nabla \hat{\alpha} + c \hat{\alpha})\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

また, H_0^1 -projection の定義より, $\|P_h (-\Delta)^{-1} (b \cdot \nabla \hat{\alpha} + c \hat{\alpha})\|_{H_0^1} \leq \|(-\Delta)^{-1} b \cdot \nabla \hat{\alpha}\|_{H_0^1} + \|(-\Delta)^{-1} c \hat{\alpha}\|_{H_0^1}$ であるので, この右辺の第 1 項 $\|P_h (-\Delta)^{-1} b \cdot \nabla \hat{\alpha}\|_{H_0^1}$ と第 2 項 $\|P_h (-\Delta)^{-1} c \hat{\alpha}\|_{H_0^1}$ をそれぞれ次のように評価する.

第 1 項は, $\varphi = (-\Delta)^{-1} b \cdot \nabla \hat{\alpha}$ とおくと $-\Delta \varphi = b \cdot \nabla \hat{\alpha}$ を満たすことから次を導く.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H_0^1}^2 &= (\nabla \varphi, \nabla \varphi) = (-\Delta \varphi, \varphi) \\ &= (b \cdot \nabla \hat{\alpha}, \varphi) \\ &\leq \|b\|_{L^\infty} \|\hat{\alpha}\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C_b \|\hat{\alpha}\|_{H_0^1} C_p \|\varphi\|_{H_0^1} \quad (C_b = \|b\|_{L^\infty}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

よって,

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{-1} b \cdot \nabla \hat{\alpha}\|_{H_0^1} &\leq C_b C_p \|\hat{\alpha}\|_{H_0^1} \\ &\leq C_1 \alpha \quad (C_1 = C_b C_p) \end{aligned}$$

と評価される.

第 2 項は, 第 1 項と同様に $\psi = (-\Delta)^{-1} c \hat{\alpha}$ とおくと, $-\Delta \psi = c \hat{\alpha}$ を満たすことから次を得る.

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{H_0^1}^2 &= (-\Delta \psi, \psi) \\ &= (c \hat{\alpha}, \psi) \\ &\leq \|c\|_{L^\infty} \|\hat{\alpha}\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\leq C_c \|\hat{\alpha}\|_{L^2} C_p \|\psi\|_{H_0^1} \quad (C_c = \|c\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

ゆえに, Aubin-Nitsche の技法を用いれば,

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{-1} c \hat{\alpha}\|_{H_0^1} &\leq C_c C_p \|\hat{\alpha}\|_{L^2} \\ &\leq C_c C_p C_0 h \|\hat{\alpha}\|_{H_0^1} \\ &\leq C_2 h \alpha \quad (C_2 = C_0 C_c C_p) \end{aligned}$$

と評価される.

従って, これらをまとめると (3.4) の $\|N_h(W)\|_{H_0^1}$ は次により与えられる.

$$\|N_h(W)\|_{H_0^1} \leq M(C_1 + C_2 h) \alpha.$$

次に, $\|(I - P_h) A \phi\|_{H_0^1}$ を評価する.

(3.5) より, $\sup_{w \in W} C_0 h \|b \cdot \nabla w + c w\|_{L^2}$ を評価すればよい. そこで, 任意の $w = \phi_h + \hat{\alpha} \in W_h + [\hat{\alpha}]$ に対して $\|b \cdot \nabla w + c w\|_{L^2} \leq \|b \cdot \nabla \phi_h + c \phi_h\|_{L^2} + \|b \cdot \nabla \hat{\alpha} + c \hat{\alpha}\|_{L^2}$ となるので, この右辺の第 1

項と第 2 項について

$$\begin{aligned}
\|b \cdot \nabla \phi_h + c \phi_h\|_{L^2} &\leq \|b \cdot \nabla \phi_h\|_{L^2} + \|c \phi_h\|_{L^2} \\
&\leq C_b \|\phi_h\|_{H_0^1} + C_c C_p \|\phi_h\|_{H_0^1} \quad (C_b = \|b\|_{L^\infty}, C_c = \|c\|_{L^\infty}) \\
&\leq C_3 \gamma, \quad (C_3 = C_b + C_c C_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|b \cdot \nabla \hat{\alpha} + c \hat{\alpha}\|_{L^2} &\leq \|b \cdot \nabla \hat{\alpha}\|_{L^2} + \|c \hat{\alpha}\|_{L^2} \\
&\leq C_b \|\hat{\alpha}\|_{H_0^1} + C_c \|\hat{\alpha}\|_{L^2} \quad (C_b = \|b\|_{L^\infty}, C_c = \|c\|_{L^\infty}) \\
&\leq C_4 \alpha \quad (C_4 = C_b + C_0 C_c h)
\end{aligned}$$

と評価すると, $\|(I - P_h)A\phi\|_{H_0^1}$ の評価は次のように与えられる.

$$\|(I - P_h)A\phi\|_{H_0^1} \leq \sup_{w \in W} C_0 h \|b \cdot \nabla \phi + c \phi\|_{L^2} \leq C_0 h (C_3 \gamma + C_4 \alpha).$$

以上により, 検証条件 (3.4)-(3.5) の右辺の評価ができたので, 検証条件 ($TW \overset{\circ}{\subset} W$) は以下のように書き換えられる.

$$M(C_1 + C_2 h) \alpha < \gamma, \quad (3.9)$$

$$C_0 h (C_3 \gamma + C_4 \alpha) < \alpha. \quad (3.10)$$

すなわち, (3.9)-(3.10) を満たす γ と α が存在すれば (3.1) の線形楕円型作用素 L の可逆性が言えることになるのである.

そこで, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\gamma = M(C_1 + C_2 h) \alpha + \varepsilon$ とすると, (3.9) は自明でありことが分かるので (3.10) のみを考えればよいことになる. しかし, (3.10) に $\gamma = M(C_1 + C_2 h) \alpha + \varepsilon$ を代入すると,

$$C_0 h (C_3 (M(C_1 + C_2 h) \alpha + \varepsilon) + C_4 \alpha) < \alpha$$

であるので, この式を満たす α が決定できる為には,

$$1 - C_0 h (C_3 M(C_1 + C_2 h) + C_4) > 0$$

を満足すればよい. すなわち定理は証明された. ♠

特に, $b \in (W_\infty^1(\Omega))^n$ となる場合においてはよりよい評価として次の結果が得られる.

系 3.1 (3.1) で定義された線形楕円型作用素 L に対して $b \in (W_\infty^1(\Omega))$ とする時, 定理 (3.1) の仮定の下でその十分条件は

$$C_0 h (C_3 M(\hat{C}_1 + C_2) h + C_4) < 1$$

となる. 但し, 定数 $\hat{C}_1$ は次により与えられる.

$$\hat{C}_1 = C_0 (\sqrt{n} \|b\|_{L^\infty} + n C_p \|\nabla b\|_{L^\infty}).$$

証明： (3.8) を次のように評価する．

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{H_0^1}^2 &= (\nabla\varphi, \nabla\varphi) = (-\Delta\varphi, \varphi) \\
&= (b \cdot \nabla\hat{\alpha}, \varphi) \\
&= (\hat{\alpha}, -\operatorname{div}(b\varphi)) \\
&\leq \|\hat{\alpha}\|_{L^2} \|\operatorname{div}(b\varphi)\|_{L^2} \\
&\leq \|\hat{\alpha}\|_{L^2} (\sqrt{n}\|b\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{H_0^1} + n\|\nabla b\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^2}) \\
&\leq \|\hat{\alpha}\|_{L^2} (\sqrt{n}\|b\|_{L^\infty} + nC_p\|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\varphi\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

よって，Aubin-Nitsche の技法により $\|\hat{\alpha}\|_{L^2} \leq C_0 h \alpha$ となるので結果を得る． $\spadesuit$

この定理により， L の可逆性 ($(I - A)^{-1}$ の存在) を示すアルゴリズムを導いた．次に定理 3.1 を用いて，この逆作用素を直接評価するアルゴリズムを示していく．ここで， $(I - A)^{-1}$ の H_0^1 -ノルムは，

$$\|(I - A)^{-1}\|_{H_0^1} \leq \sup_{\substack{\phi \in H_0^1(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|(I - A)^{-1}\phi\|_{H_0^1}}{\|\phi\|_{H_0^1}}$$

としている．

定理 3.2 定理 3.1 と同じ記号と仮定の下で，

$$\kappa \equiv C_0 h (C_3 M (C_1 + C_2 h) + C_4) < 1$$

が成り立つ時，

$$\|(I - A)^{-1}\|_{H_0^1} \leq (R^2 + S^2)^{\frac{1}{2}} =: \mathcal{M} \quad (3.11)$$

が成立する．但し， R, S はそれぞれ次である．

$$R = (C_0 h M + 1)/(1 - \kappa), \quad S = \{(C_1 + C_2 h)R + 1\}M.$$

証明： 初めに，任意の ϕ, ψ に対して $N_h(\phi), T\phi$ を次のように定める．

$$\begin{aligned}
N_h(\phi) &= P_h \phi - [I - A]_h^{-1} P_h ((I - A)\phi - \psi), \\
T\phi &= N_h(\phi) + (I - P_h)(A\phi + \psi)
\end{aligned}$$

このとき (3.19) は， $T\phi = \phi$ と不動点定式化できるので $\phi = \phi_h + \phi_\perp \in S_h + S_\perp$ に対して

$$\begin{aligned}
\phi_h &= [I - A]_h^{-1} (P_h A \phi_\perp - \psi_h), \\
\phi_\perp &= (I - P_h) A (\phi_h + \phi_\perp) + \psi_\perp
\end{aligned} \quad (3.12)$$

と書ける．よって (3.12) より次が導ける．

$$\begin{aligned}
\|\phi_h\|_{H_0^1} &\leq \|[I - A]_h^{-1}\|_{H_0^1} \|P_h A \phi_\perp + \psi_h\|_{H_0^1} \\
&\leq M(C_1 + C_2 h) \|\phi_\perp\|_{H_0^1} + M \|\psi_h\|_{H_0^1},
\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
\|\phi_\perp\|_{H_0^1} &\leq \|(I - P_h) A (\phi_h + \phi_\perp)\|_{H_0^1} + \|\psi_\perp\|_{H_0^1} \\
&\leq C_0 h (C_3 \|\phi_h\|_{H_0^1} + C_4 \|\phi_\perp\|_{H_0^1}) + \|\psi_\perp\|_{H_0^1}.
\end{aligned} \quad (3.14)$$

そこで, (3.13) 式の $\|\phi_h\|_{H_0^1}$ を (3.14) に代入して, $\|\phi_\perp\|_{H_0^1}$ について解くと

$$\begin{aligned}\|\phi_\perp\|_{H_0^1} &\leq \{(C_0 h M + 1)/(1 - \kappa)\} \|\psi\|_{H_0^1} \\ &= R \|\psi\|_{H_0^1}\end{aligned}\quad (3.15)$$

となる. また, 左辺の $\|\phi_\perp\|_{H_0^1}$ を (3.13) 式に代入して次式を得る.

$$\begin{aligned}\|\phi_h\|_{H_0^1} &\leq M(C_1 + C_2 h) R \|\psi\|_{H_0^1} + M \|\psi_h\|_{H_0^1} \\ &= \{(C_1 + C_2 h) R + 1\} M \|\psi\|_{H_0^1} \\ &= S \|\psi\|_{H_0^1}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

故に (3.15), (3.16) より

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{H_0^1}^2 &= \|\phi_h\|_{H_0^1}^2 + \|\phi_\perp\|_{H_0^1}^2 \\ &\leq (R^2 + S^2) \|\psi\|_{H_0^1}^2\end{aligned}$$

が導かれ, $(I - A)\phi = \psi$ であることから定理を得る.

♠

また, b が $b \in (W_\infty^1(\Omega))^n$ となる場合, 定理 3.2 と同様にして次が作られる.

系 3.2 系 3.1 と同じ記号と仮定の下で,

$$\hat{\kappa} \equiv C_0 h (C_3 M (\hat{C}_1 + C_2) h + C_4) < 1$$

が成り立つ時,

$$\|(I - A)^{-1}\|_{H_0^1} \leq (\hat{R}^2 + \hat{S}^2)^{\frac{1}{2}} =: \hat{\mathcal{M}} \quad (3.17)$$

が成立する. 但し, $\hat{R}, \hat{S}$ はそれぞれ次である.

$$\hat{R} = (C_0 h M + 1)/(1 - \hat{\kappa}), \quad \hat{S} = \{(\hat{C}_1 + C_2) h R + 1\} M.$$

以上の定理より, $\|(I - A)^{-1}\|_{H_0^1}$ の評価ができた. そこで, $Lu = f$ を考える. 前述のようにこれは次と同値である.

$$(I - A)u = F. \quad (3.18)$$

但し, $F := (-\Delta)^{-1} f$ である. すなわち, 次のように評価することがここからの目的である.

$$\|u\|_{H_0^1} = \|(I - A)^{-1} F\|_{H_0^1} \leq \|(I - A)^{-1}\|_{H_0^1} \|F\|_{H_0^1}. \quad (3.19)$$

$F = (-\Delta)^{-1} f$ であったから (3.19) を f を用いて表すと次の系がいえる.

次のセクションで簡単に触れるが, この評価は楕円型問題 (1.2) についてその残差方程式の検証のとき用いることができる.

系 3.3 (3.19) 式の評価は次のようにできる .

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C_p \|(I - A)^{-1}\|_{H_0^1} \|f\|_{L^2} .$$

但し , C_p は Poincaré 定数である .

証明 : $F = (-\Delta)^{-1}f$ より , F は $-\Delta F = f$ を満たすので

$$\|F\|_{H_0^1}^2 = (\nabla F, \nabla F) = (-\Delta F, F) = (f, F) \leq \|f\|_{L^2} \|F\|_{L^2}$$

となる . よって , Poincaré 定数 C_p により $\|F\|_{L^2} \leq C_p \|F\|_{H_0^1}$ から結果を導く . ♠

4 モデル問題と数値計算

この章では , 以下に示す例に対して数値的検証アルゴリズムの数値計算結果を紹介していく . しかし , その前に一般の非線形楕円型問題 (1.2):

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x; u, \nabla u) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

を考え , この問題への定理の適用方法について述べていく .

はじめに , 有限要素法により次のような (1.2) の弱形式を満たす近似解 u_h を求める .

$$(\nabla u_h, \nabla \phi_h) = (f(x; u_h, \nabla u_h), \nabla \phi_h), \quad \text{for all } \phi_h \in S_h.$$

そして , 準備として (1.2) の残差方程式を構成する .

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u} &= f(x; u_h, \nabla u_h) & \text{in } \Omega \\ \bar{u} &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

方程式 (4.1) を満たす $\bar{u}$ を用いて ,

$$u - u_h = (u - \bar{u}) + (\bar{u} - u_h), \quad w := u - \bar{u}, \quad v_0 := \bar{u} - u_h$$

とする . この時 , 明らかに w は次の残差方程式:

$$\begin{aligned} -\Delta w &= g(w) & \text{in } \Omega \\ w &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.2}$$

の解である . 但し , $g(w) := f(x; w + v_0 + u_h, \nabla(w + v_0 + u_h)) - f(x; u_h, \nabla u_h)$ とする .

よって , $\|u - u_h\|_{H_0^1} \leq \|w\|_{H_0^1} + \|v_0\|_{H_0^1}$ であることから , (1.2) の解に対する数値検証は $\|w\|_{H_0^1}$ の評価を行うことと同値である . この事実は , $\|v_0\|_{H_0^1}$ の評価が前もって行えることであり , 具体的な計算方法については [1] を参照されたい .

次に , 残差方程式 (4.2) の検証方法について述べていく .

方程式 (4.2) の線形化 (Newton 型) 作用素を用いて , (4.2) を次のように同値変形する .

$$\begin{aligned} -\Delta w - g'(-v_0)w &= g(w) - g'(-v_0)w & \text{in } \Omega \\ w &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここに, $g'(-v_0)$ は $g(w)$ の $-v_0$ における Fréchet 微分であり, $u_h \in L^\infty$ より (3.1) のように

$$Lv \equiv -\Delta v - g'(-v_0)v = -\Delta w + b \cdot \nabla v + cv$$

と書けることに注意する．そこで, ある候補者集合 $W \subset H_0^1(\Omega)$ を与えたときに構成される (4.3) の右辺 $g(W) \equiv g(W) - g'(u_h)W$ を用いて, 線形楕円型問題 ($Lv = g(W)$):

$$\begin{aligned} -\Delta v + b \cdot \nabla v + cv &= g(W) & \text{in } \Omega \\ v &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

を考える．そして, 方程式 (4.5) に本論文中で示した検証アルゴリズムを適用して, 得られた v の H_0^1 -ノルムと候補者集合 W の H_0^1 -ノルムを比較し, 包含 (ノルムの大小) 関係を調べれば定理 2.1 より (4.2) の数値的検証を行うことができるのである．すなわち, w の存在範囲を検証できれば $u \in W + v_0 + u_h$ の存在範囲も検証できたことになるのである．

但し, 自己共役問題においては候補者集合を $W \subset H_0^1(\Omega)$ とできるが, 非自己共役問題については問題により適した候補者集合を定め直さなければならない．具体的には, $g(W)$ が L^2 -ノルムでは評価できない場合が生じるのである．

しかしながら, 本文中の検証アルゴリズムによって, $\|(I - A)^{-1}\|_{H_0^1}$ の評価を得られているのであればその適用は簡単にできることは言うまでもない．

また, 以下の例について考える領域を $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ とする．これにより, 本文中にも示した Poincaré 定数は $C_p = 1/\pi$ とできる．加えて, 有限要素空間を区分 1 次多項式 ($C_0 = 1/\pi$) または区分 2 次多項式 ($C_0 = 1/2\pi$) の四角形一様分割とし, その分割数を K ($h \equiv 1/(K+1)$) により定めることにする．また $M, \mathcal{M}$ は 3 章に定めた $M = \|\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}\|_E$, $\mathcal{M} = (R^2 + S^2)^{\frac{1}{2}}$, $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{R}^2 + \hat{S}^2)^{\frac{1}{2}}$ とする．

例 4.1 (Emden 方程式)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u^2 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

以下では $\lambda = 1$ とする．

例 4.1 において, 残差方程式 (4.2) を構成した後の線形化作用素 L と $g(W)$ の具体的な形は, 候補者集合 W の任意の元 $w \in W$ に対して,

$$\begin{aligned} Lv &\equiv -\Delta v - 2\lambda u_h v, \\ g(w) &\equiv \lambda(w + v_0 + u_h)^2 - \lambda u_h^2 - 2\lambda u_h w \end{aligned}$$

と与えられる．よって, 候補者集合を $W \subset H_0^1(\Omega)$ としても $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_h \in L^\infty(\Omega)$ であることから $g(W) \subset L^2(\Omega)$ となる．ゆえに, 定理 (3.2) により $\|w\|_{H_0^1}$ を計算すれば Emden 方程式の検証が行えるのである．また, この例での近似解 u_h の形状は図 2, 線形化逆作用素の数値結果は表 1 にそれぞれ示してある．

表 1 を考察する前に $\mathcal{M}$ の値について考える． $\mathcal{M}$ の値は定理 3.2 において $\mathcal{M} := (R^2 + S^2)^{\frac{1}{2}}$ によって定めた．但し, R, S は $R = (C_0 h M + 1)/(1 - \kappa)$, $S = \{(C_1 + C_2 h)R + 1\}M$ である．よって分割数 K を大きくとると, すなわちメッシュサイズ h を $h \rightarrow 0$ とすると, $R \rightarrow 1$, $S \rightarrow M$ であるから, $\mathcal{M} \rightarrow (M^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ であることが分かる．

表 1 を見ると, 分割数 K の値を大きくすると, 行列 $\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}$ の次数が上がることから M の値が増大している．しかし, ここではその増分は大きくないために, 表 1 でとった K の範囲では $\mathcal{M}$ の値は結果として減少したものと考えられる．

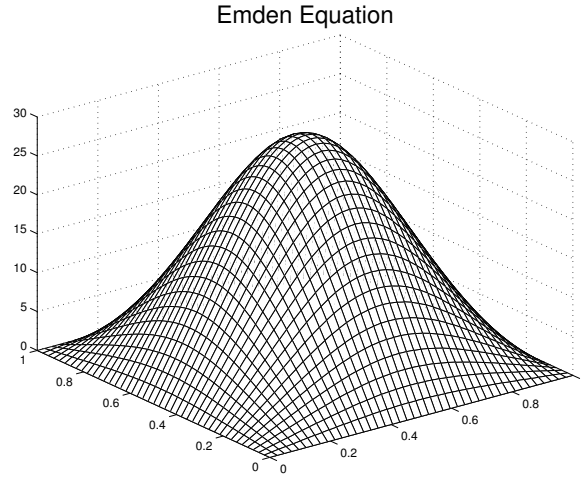


図 2: Emden 方程式の近似解の形状

K	$\mathcal{M}$	M	$\ v_0\ _{H_0^1}$	$\ c\ _{L^\infty}$
5	8.5863	2.7381	1.4758	58.5432
10	3.9489	2.7461	0.4533	58.5150
15	3.5194	2.7479	0.2125	58.5149
20	3.3576	2.7561	0.1217	58.5143

表 1: 自己共役問題の数値結果 [Emden ($\lambda = 1$)]

例 4.2 (Allen-Cahn 方程式)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(u-1)(a-u)u & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

但し, $\lambda = 150$, $a = 0.01$ とする.

例 4.2 においても例 4.1 と同様に自己共役問題であり, 残差方程式 (4.2) を構成した後の線形化作用素 L と $g(W)$ の具体的な形は, 候補者集合 W の任意の元 $w \in W$ に対して,

$$\begin{aligned} Lv &\equiv -\Delta v + \lambda(a - 2(a+1)u_h + 3u_h^2)v, \\ g(w) &\equiv \lambda((w + v_0 + u_h) - 1)(a - (w + v_0 + u_h))(w + v_0 + u_h) \\ &\quad - \lambda(u_h - 1)(a - u_h)u_h + \lambda(a - 2(a+1)u_h + 3u_h^2)w \end{aligned}$$

と与えられる. よって, 候補者集合 $W \subset H_0^1(\Omega)$ に対して $g(W) \subset L^2(\Omega)$ となる. また, この例では解は分岐点を持つことが知られているので, その上下の分岐近似解 u_h の形状を図 3 に示しておく.

この例においては, $\lambda = 150$ ととったために $\|c\|_{L^\infty}$ の値は比較的大きくなる. このため, メッシュサイズ h が十分に小さくない $K = 5, 10$ のときに線形化作用素の可逆性を示すことは失敗している.

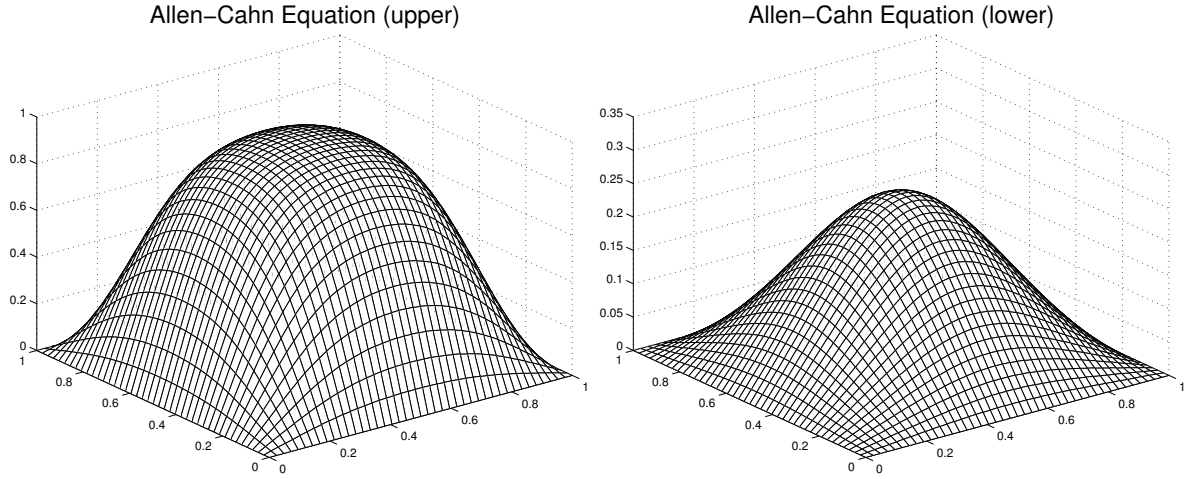


図 3: Allen-Cahn 方程式の上側分岐，下側分岐近似解の形状

K	Allen-Cahn (upper)				Allen-Cahn (lower)			
	$\mathcal{M}$	M	$\ v_0\ _{H_0^1}$	$\ c\ _{L^\infty}$	$\mathcal{M}$	M	$\ v_0\ _{H_0^1}$	$\ c\ _{L^\infty}$
5	Fail	1.4665	0.1219	354.9727	Fail	2.5789	0.0122	72.1737
10	Fail	1.4718	0.0334	176.8749	3.7437	2.5849	0.0038	59.3859
15	2.8504	1.4730	0.0161	141.4657	3.2749	2.5867	0.0018	53.8827
20	2.4463	1.4732	0.0094	143.8123	3.1396	2.6107	0.0011	51.0762

表 2: 自己共役問題の数値結果 [Allen-Cahn ($\lambda = 150$, $a = 0.01$)]

例 4.3 (Plum[4] の例)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u \left(\lambda - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

続いて，*Plum* の例について考える．但し， $\lambda = 25$ とする．

Plum 教授によると，この方程式はいくつかの Branch を持つことが分かっている．(図 4-5) ここでは，特に $\lambda = 25$ の場合について数値検証を行った．

例 4.3 は，例 4.1-例 4.2 とは異なり非自己共役問題である．この違いは，前と同様に残差方程式 (4.2) を構成した後の $g(W)$ の具体的な形を示すことにより明確となる．

はじめに，線形化作用素 L の具体的な形を次に示しておく．

$$Lv \equiv -\Delta v + (u_h \nabla u_h) \cdot \nabla v - \left(\lambda - \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 \right) v.$$

次に，候補者集合 W の任意の元を $w \in W$ とすると， $g(W)$ は次により与えられる．

$$\begin{aligned} g(w) &\equiv (w + v_0 + u_h) \left(\lambda - \frac{1}{2} |\nabla(w + v_0 + u_h)|^2 \right) - u_h \left(\lambda - \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 \right) \\ &\quad + (u_h \nabla u_h) \cdot \nabla w - \left(\lambda - \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 \right) w \end{aligned}$$

しかし、この場合に候補者集合 $W \subset H_0^1(\Omega)$ に対して $g(W) \not\subset L^2(\Omega)$ であるので、 $g(W) \subset L^2(\Omega)$ となるような候補者集合を定めなければならない。これについては [4] を参照されたい。

表 3 を見ると、例 1、例 2 と異なり、分割数 K の値を大きくした場合にも M の値が減少している。これは微分項の影響によるものと考えられる。 $\|b\|_{L^\infty}$ 、 $\|c\|_{L^\infty}$ の値についても増加していないため、線形化作用素の可逆性は示される。

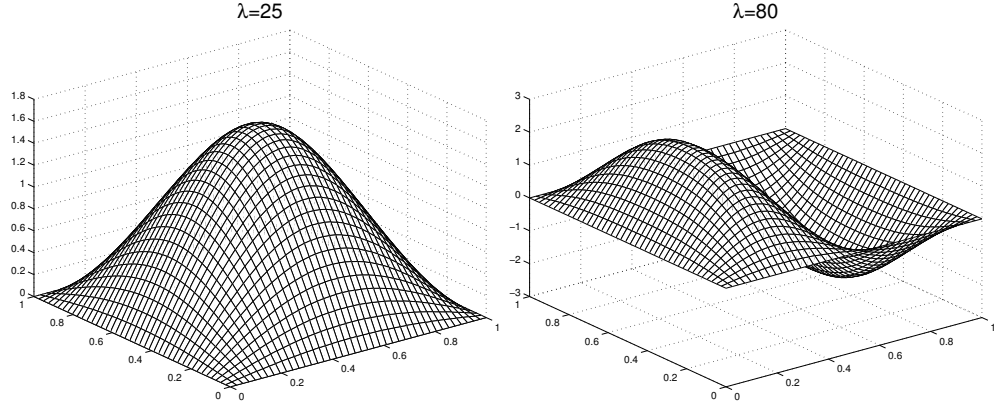


図 4: $\lambda = 25$ (First Branch) , $\lambda = 80$ (Second Branch) の近似解の形状

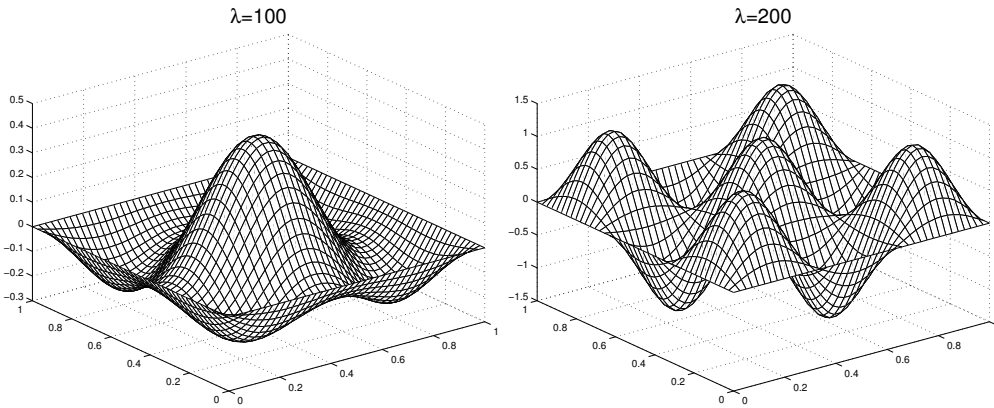


図 5: $\lambda = 100$ (Third Branch) , $\lambda = 200$ (Fourth Branch) の近似解の形状

K	$\mathcal{M}$	M	$\ v_0\ _{H_0^1}$	$\ b\ _{L^\infty}$	$\ c\ _{L^\infty}$
10	Fail	2.0809	0.3088	4.6210	25
20	13.2827	2.0473	0.1587	4.5900	25
30	8.0254	2.0410	0.1067	4.5368	25
40	6.8427	2.0404	0.0804	4.5001	25

表 3: 非自己共役問題の数値結果 [Plum の例 ($\lambda = 25$)]

例 4.4 (Burgers 方程式)

$$\begin{aligned} u''(x) &= \lambda u(x)u'(x) \quad \text{in } (0, 1) \\ u(0) &= -1 \\ u(1) &= 1. \end{aligned}$$

最後に, 1次元問題ではあるが Burgers 方程式について考える. 但し, $\lambda = 1, 10, 100$ とする.

はじめに, $p(x) \equiv 2x - 1$ と定めて境界条件を処理する. すなわち, $z(x) \equiv u(x) - p(x)$ とすると $z(x) \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$ であるので, $u(x) = z(x) + p(x)$ を例 4.4 に代入すると

$$(z(x) + p(x))'' = \lambda(z(x) + p(x))(z(x) + p(x))'$$

となる. よって, $p''(x) = 0$ であるので例 4.4 は次の問題と同値である.

$$\begin{cases} z''(x) = \lambda(z(x) + p(x))(z(x)' + p'(x)) & \text{in } (0, 1) \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

ゆえに, 前と同様に残差方程式 (4.2) を構成した後の線形化作用素 L と $g(W)$ の具体的な形は, 候補者集合 W の任意の元 $w \in W$ に対して,

$$\begin{aligned} Lv &\equiv -v'' + \lambda(z_h + p)v' + \lambda(z_h' + p')v, \\ g(w) &\equiv -\lambda[((w + v_0 + z_h) + p)((w + v_0 + z_h)' + p') + (z_h + p)(z_h' + p')] \\ &\quad + \lambda(z_h + p)w' + \lambda(z_h' + p')w \end{aligned}$$

と与えられる. ここに, z_h は (4.5) の有限要素解である. この場合, 一次元であることから候補者集合を $W \subset H_0^1(0, 1)$ としても $g(W) \subset L^2(\Omega)$ となる.

数値結果は表 4 のようになる. 微分項の係数 b が $b \in H^1(\Omega)$ となり, 系 3.2 を用いることができるので, $\hat{\mathcal{M}}$ についても可逆性を調べた.

まず $\lambda = 1, 10$ において, 表 4 内でとった K についてはいずれも可逆性がいえている. それに対し, $\lambda = 100$ の場合には $\|b\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty}$ の値はかなり大きくなるため, 可逆性を示すにはメッシュサイズ h を十分に小さくとる必要がある.

しかし, 分割数を $K = 800$ にとったとき, 可逆性は言えるがいずれの λ においても M の値の増加分がやや大きくなっている. $\|b\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty}$ の値に大きな変化が見られないことから, これは $h = 1/(K + 1)$ が小さくなることによって丸め誤差の影響を受けた為と考えられる. K の値をあまりに大きくとると M の値が跳ね上がることも考えられるが, ここではまだ M は十分に小さい.

最後に, 可逆でない作用素 L に関して考察する.

表 5 は $n = 2$ のときの楕円型作用素,

$$Lu \equiv \Delta u + \lambda u$$

における $\mathcal{M}$ の値である.

方程式 $Lu = 0$ が自明でない解を持つとき, K のとり方にかかわらず L の可逆性の検証は失敗する. ここで, 方程式 $Lu = 0$ は $\lambda = 2\pi^2$ のときに自明でない解 $u = \sin \pi(x + y)$ を持つため, 実際に $\lambda = 2\pi^2$ のとき検証は失敗する. また, 表 5 を見ると, λ が $\lambda = 2\pi^2$ に近づくとき M が極端に大きくなり, 検証が難しくなることが分かる.

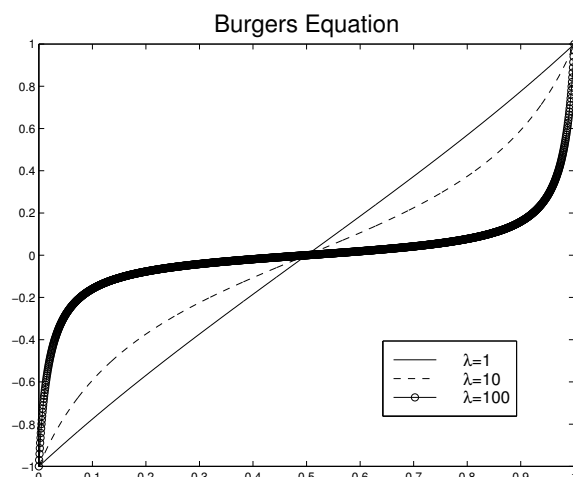


図 6: $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$ の近似解の形状

5 今後の課題とまとめ

まとめとしては，計算可能な範囲で実用的な問題に対しての線形化作用素の可逆性，ならびに逆作用素ノルムの直接評価に成功した．特に，非自己共役問題においては従来の方法とは異なり，非対称性を固有値問題へ帰着させることができる為簡素なプログラミング構成による低コスト計算を実現できた．

今後の課題は，非線形問題 (1.2) への適応である．すなわち本文中の結果を元に (1.2) の数値検証を行う上で必要となる検証の枠組みを決定することである．

最後に，解析的に解の存在を言うことが困難な問題に対して，積極的に本文中の結果の適用を試み，存在検証ならびに一意存在検証を示す数値検証アルゴリズムを開発していくことも重要な課題である．

参考文献

- [1] 中尾充宏, 山本野人, 精度保証付き数値計算・コンピュータによる無限への挑戦 (チュートリアル/応用数理の最前線), 日本評論社, (1998).
- [2] Nakao, M.T., Yamamoto, N. and Nagatou, K., Numerical verifications of eigenvalues of second-order elliptic operators, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* **16** (1999), pp. 308-320.
- [3] Nagatou, K., Yamamoto, N. and Nakao, M.T., An approach to the numerical verification of solutions for nonlinear elliptic problems with local uniqueness, *Numerical Functional Analysis and Optimization* **20** (1999), pp. 543-130.
- [4] M.Plum, Numerical existence proofs and explicit bounds for solutions of nonlinear elliptic boundary value Problems, *Computing* **149** (1992), pp.25-44.

(K, λ)	$\mathcal{M}$	$\hat{\mathcal{M}}$	M	$\ v_0\ _{H_0^1}$	$\ b\ _{L^\infty}$	$\ \nabla b\ _{L^\infty}$	$\ c\ _{L^\infty}$
(100,1)	1.6592	1.4193	1.0001	2.3356e-5	1	2.3439	2.3439
(200,1)	1.6570	1.4168	1.0001	7.5978e-6	1	2.3440	2.3440
(400,1)	1.6569	1.4163	1.0011	5.4002e-6	1	2.3440	2.3440
(800,1)	1.6735	1.4272	1.0173	8.3979e-6	1	2.3440	2.3440
(K, λ)	$\mathcal{M}$	$\hat{\mathcal{M}}$	M	$\ v_0\ _{H_0^1}$	$\ b\ _{L^\infty}$	$\ \nabla b\ _{L^\infty}$	$\ c\ _{L^\infty}$
(100,10)	5.0032	1.4958	1.0000	1.0998e-3	10	60.3639	60.3639
(200,10)	4.6192	1.4511	1.0001	2.6918e-4	10	60.4182	60.4182
(400,10)	4.4556	1.4323	1.0001	7.5874e-5	10	60.4326	60.4326
(800,10)	4.4204	1.4306	1.0108	3.8538e-5	10	60.4363	60.4363
(K, λ)	$\mathcal{M}$	$\hat{\mathcal{M}}$	M	$\ v_0\ _{H_0^1}$	$\ b\ _{L^\infty}$	$\ \nabla b\ _{L^\infty}$	$\ c\ _{L^\infty}$
(100,100)	Fail	Fail	1.0000	0.2670	100	4715.09	4715.09
(200,100)	Fail	Fail	1.0001	0.0742	100	4913.15	4913.15
(400,100)	Fail	11.8911	1.0005	0.0181	100	4986.50	4986.50
(800,100)	Fail	1.6204	1.0065	0.0044	100	5009.46	5009.46

表 4: 1 次元非自己共役問題の数値結果 [Burgers 方程式 ($u(0) = -1$, $u(1) = 1$)]

$K / \lambda :$	$1.50\pi^2$	$1.60\pi^2$	$1.70\pi^2$	$1.80\pi^2$	$1.90\pi^2$	$1.99\pi^2$
5	4.7488	5.9706	8.0815	12.5864	30.0673	Fail
10	4.4289	5.5138	7.3466	11.0759	22.6779	Fail
15	4.3264	5.3727	7.1362	10.7005	21.5737	365.4047
20	4.2758	5.3039	7.0352	10.5282	21.1234	243.3839

表 5: $Lu := \Delta u + \lambda u$ の逆作用素ノルム