

修 士 論 文

題 目 自由境界問題の解に対する数値的検証法

氏 名 大森 健一

九州大学大学院数理学府 数理学専攻 修士課程

指導教官 中尾 充宏 教授

平成 16 年 1 月 30 日

目 次

1	はじめに	1
2	数値的検証法の概要	2
3	線形化逆作用素の存在検証とノルム評価	4
3.1	逆作用素のノルム評価	11
3.2	直接的 a priori 評価	13
4	Numerical Examples	14
5	まとめ	16
6	付録	i
6.1		i
6.2		ii

謝辞

本論文作成にあたって御指導して頂いた九州大学大学院数理学研究院 (院長) 中尾 充宏 教授に心より感謝いたします。またお忙しい中、貴重な助言をして下さった九州大学情報基盤センター 渡部 善隆 助教授, 九州大学大学院数理学研究院 長藤 かおり 助教授, 日本学術振興会特別研究員 (PD) の 小林 健太 研究員, 同府 橋本 弘治 先輩にこの場を借りてお礼申し上げます。

また, 本研究は九州大学大学院数理学研究院 21 世紀 COE プログラムの多大なるご支援により行われました。拠点リーダー (中尾 充宏 教授) をはじめ各プロジェクトリーダー (田端 正久 教授, 小西 貞則 教授, 横山 和弘 教授) ならびに関係者の方々に厚く御礼申し上げます。

自由境界問題の解に対する数値的検証法

大森 健一

九州大学大学院数理学府

1 はじめに

本論文は、次の自由境界問題：

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \mathcal{F}(x; u(x), u'(x)) & \text{if } x \in (0, c), \\ u(x) &> 0 & \text{if } x \in [0, c), \\ u(x) &= 0 & \text{if } x \in [c, \infty), \\ u(0) &= u_0, \quad u'(c) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

の解 $(u(x), c)$ の数値的検証法について述べる．但し、 $\mathcal{F}$ は 3 変数関数として十分滑らかとし、 $u_0 > 0$ とする．

問題 (1.1) は、例えば「ロープの一方を y -軸の $(0, u_0)$ で固定した時に、はじめに x -軸に接する点 $(c, 0)$ とその時の $x \in [0, c]$ 上でのロープの形状 $u(x)$ を求める．」などの問題から生じる [1][6]．この問題に対して、U. Schäfer は離散問題に対しての精度保証付き数値計算アルゴリズムを提案している [4]．この手法は、有限差分法的な考えが基盤となっており非常に高い精度での検証結果が示されているものの、解の大域的な一意存在性を仮定するなどのかなり強い条件も必要としている．そこで、本論文では一般性を残したままで (1.1) を混合型の不動点方程式へと変換し、その線形化逆作用素のノルム評価 [7] を用いた (1.1) の解の数値的検証アルゴリズムを提案する．

ここで、

$$v(x) \equiv u(cx) - (1-x)u_0, \quad x \in [0, \infty)$$

とする．この時、(1.1) は $(0, 1)$ 区間上の関数 $v(x)$ と実数 c を求める次の問題に帰着する．

$$\begin{aligned} -v''(x) &= f(v, c) & \text{if } x \in (0, 1), \\ v(x) &> -(1-x)u_0 & \text{if } x \in [0, 1), \\ v(x) &= -(1-x)u_0 & \text{if } x \in (1, \infty), \\ v(0) &= v(1) = 0, \quad v'(1) = u_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

但し、 $f(v, c) \equiv c^2 \cdot \mathcal{F}(cx; v(x) + (1-x)u_0, (1/c)(v'(x) - u_0))$ である．

準備として、以下に使用する記号や関数空間を定義する．

定義 1 次の空間を定義する．

$$\begin{aligned} H_0^1(0, 1) &\equiv \left\{ \phi \in H^1(0, 1) : \phi(0) = \phi(1) = 0 \right\}, \\ W_{\infty, 0}^1(0, 1) &\equiv \left\{ \phi \in W_{\infty}^1(0, 1) : \phi(0) = \phi(1) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

定義 2 任意の $g \in L^\infty(0, 1)$ に対して、

$$\begin{aligned} -\phi'' &= g \quad \text{in } (0, 1), \\ \phi(0) &= \phi(1) = 0, \end{aligned}$$

の (一意) 解を $\phi = -\Delta^{-1}g \in W_{\infty, 0}^1(0, 1) \cap W_{\infty}^2(0, 1)$ と表す．

2 章では数値的検証法の概要について述べる．これは、非線形方程式への数値的検証法の適用方法をはじめとして解の数値的検証を効率的に誤差の数値的検証へと帰着させるアルゴリズムである．3 章では 2 章での最終的な数値的検証の数学的な裏付けとなる (1.2) の線形化作用素の可逆性ならびにその逆作用素評価の精度保証付き数値計算アルゴリズムを提案する．そして、4 章では (1.1) に対しての 2-3 章の有効性を検証する為に、具体的な問題に対する数値的検証結果を紹介する．

2 数値的検証法の概要

この章では (1.2) の解の数値的検証法（中尾理論 [2]）についての概要を示していく．これは、(1.2) の解 (v, c) と近似解 $(\hat{v}_h, \hat{c}_h)$ との誤差の数値的検証法である．

はじめに、有限要素法により次のような (1.2) の弱形式を満たす近似解 $(\hat{v}_h, \hat{c}_h)$ を求める．

$$\begin{aligned} (\hat{v}_h', \varphi_h') &= (f(\hat{v}_h, \hat{c}_h), \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in S_h, \\ \hat{v}_h'(1) &= u_0. \end{aligned}$$

ここに、 $(\cdot, \cdot)$ は L^2 -内積であり、 S_h は分割 $0 = x_0 < \dots < x_{N+1} = 1$ に依存する有限要素近似空間である．更に、分割幅をそれぞれ $h_i = x_{i+1} - x_i$, $(0 \leq i \leq N)$ とし、最大分割幅を $h = \max_i h_i$ としておく．

次に、一意に存在する $\bar{v} \in W_{\infty,0}^1(0,1) \cap W_{\infty}^2(0,1)$ により、解 (v, c) と近似解 $(\hat{v}_h, \hat{c}_h)$ との誤差 $v - \hat{v}_h = (v - \bar{v}) + (\bar{v} - \hat{v}_h)$ を

$$w := v - \bar{v}, \quad v_0 := \bar{v} - \hat{v}_h, \quad d := c - \hat{c}_h$$

により表す．ここでは、具体的に $\bar{v}$ は次の斉次 Dirichlet 境界条件を満たす Poisson 方程式の解とする．

$$\begin{aligned} -\bar{v}'' &= f(\hat{v}_h, \hat{c}_h) \quad \text{in } (0,1) \\ \bar{v}(0) &= \bar{v}(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

これは、後に示す H_0^1 -射影の性質 $(P_h \bar{v} = \hat{v}_h)$ を利用して $\|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}$ の評価を行う為である．

すなわち、現在盛んに研究されている有限次元の精度保証法により $(\hat{v}_h, \hat{c}_h)$ の局所一意存在性が示せれば、非線形問題 (1.2) の数値的検証は次の残差方程式:

$$\begin{aligned} -w'' &= f(\hat{v}_h + w + v_0, \hat{c}_h + d) - f(\hat{v}_h, \hat{c}_h) \quad \text{in } (0,1), \\ w'(1) &= u_0 - \hat{v}_h'(1) - v_0'(1), \\ w(0) &= w(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

の解の検証へと帰着される．

そこで、数値的検証の効率化の為に (2.2) の線形化（Newton 型）作用素を用いて、次のように同値変形する．

$$\begin{aligned} -w'' - f'(\hat{v}_h, \hat{c}_h) \cdot (w, d) &= g_1(w, d) \quad \text{in } (0,1), \\ w'(1) &= g_2, \\ w(0) &= w(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここに, $f'(\hat{v}_h, \hat{c}_h)$ は $f(v, c)$ の $(\hat{v}_h, \hat{c}_h)$ における Fréchet 微分であり,

$$\begin{aligned} g_1(w, d) &\equiv f(w + v_0 + \hat{v}_h, d + \hat{c}_h) - f(\hat{v}_h, \hat{c}_h) - f'(\hat{v}_h, \hat{c}_h) \cdot (w, d), \\ g_2 &\equiv u_0 - \hat{v}'_h(1) - v'_0(1) \end{aligned}$$

である.

ここで,

$$W^{\mathbf{R}} \equiv W \times \mathbf{R}, \quad W \equiv W_{\infty,0}^1(0,1) \cap \left(\bigvee_{i=0}^N C^1[x_i, x_{i+1}] \right)$$

として, $z = (v, c) \in W \times \mathbf{R} = W^{\mathbf{R}}$ のノルムを次により定義する.

$$|||z||| \equiv \max \left(\max_{0 \leq i \leq N} \|v(x)\|_{C^1[x_i, x_{i+1}]}, |c| \right). \quad (2.4)$$

但し, W は全体としては $W_{\infty,0}^1(0,1)$ の部分空間であり, かつ, 各小区間では $C^1[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$ に制限されている. このような空間設定を行う背景は, 境界上での微分の値を評価する為である.

注意 1 $W^{\mathbf{R}}$ は $|||\cdot|||$ に関して *Banach* 空間となる.

更に, 数値的検証の為に次のノルムを導入する.

$$\begin{aligned} |||z|||_{W_{\infty,0}^1} &\equiv \max \left(\|v\|_{W_{\infty,0}^1}, |c| \right), \\ |||z|||_{L^\infty} &\equiv \max \left(\|v\|_{L^\infty}, |c| \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

補題 1 (2.4) と (2.5) で定義されたノルムは $|||\cdot||| = |||\cdot|||_{W_{\infty,0}^1}$ である.

証明: 任意の $v \in W$ に対して,

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|v(x)\|_{C^1[x_i, x_{i+1}]} = \max \left(\|v\|_{W_{\infty,0}^1}, \|v\|_{L^\infty} \right)$$

となることから $|||\cdot|||_{W_{\infty,0}^1} \leq |||\cdot|||$ は明らかである. 一方で, $v(0) = v(1) = 0$ より $v(x) = \int_0^x v'(t) dt$ と表せることから

$$|v(x)| = \left| \int_0^x v'(t) dt \right| \leq x \|v\|_{W_{\infty,0}^1} \leq \|v\|_{W_{\infty,0}^1}$$

となり, 補題は証明された. ■

この時, $\mathbf{w} = (w, d)$, $g(\mathbf{w}) = (g_1(\mathbf{w}), g_2)$ とし, 線形作用素 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}\mathbf{w} \equiv \begin{pmatrix} -w''(x) + f'(\hat{v}_h, \hat{c}_h) \cdot (w, d) \\ w'(1) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

により定義すると, $\mathcal{L}$ が可逆であれば (2.3) は

$$\mathbf{w} = F(\mathbf{w}) \left(\equiv \mathcal{L}^{-1} g(\mathbf{w}) \right)$$

と不動点方程式へと定式化できる. ここに, F は $W^{\mathbf{R}}$ からそれ自身へのコンパクト作用素となる.

従って、候補者集合（解の存在を期待する集合）を $Y \equiv \{\mathbf{w} \in W^{\mathbf{R}} : |||\mathbf{w}|||_{W_{\infty,0}^1} \leq \alpha\}$ により定める時、

$$F(Y) \subset Y \quad (2.7)$$

が満たされると Schauder の不動点定理により $F(\hat{\mathbf{w}}) = \hat{\mathbf{w}}$ なる $\hat{\mathbf{w}} \in Y$ が存在することが言える。よって、(2.7) を計算機により示すことが本質的な問題となる。しかしながら、 Y は zero 中心の $W^{\mathbf{R}}$ -近傍であることから、検証条件の十分条件は

$$|||F(Y)|||_{W_{\infty,0}^1} \equiv \sup_{\mathbf{w} \in Y} |||F(\mathbf{w})|||_{W_{\infty,0}^1} < \alpha \quad (2.8)$$

となる。そこで、 $|||F(Y)|||_{W_{\infty,0}^1}$ の評価が必要となるが、これは任意の $\mathbf{w} \in Y$ において $z = F(\mathbf{w})$ とすると $\mathcal{L}z = g(\mathbf{w})$ を満たすことを利用して評価していく。具体的な算定方法については次章で示す。

3 線形化逆作用素の存在検証とノルム評価

この章では、線形化逆作用素の直接評価法について述べていく。さて、(2.6) で定義した線形作用素 $\mathcal{L}$ は次の形として一般化される。

$$\mathcal{L}z \equiv \begin{pmatrix} -v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x) + c \cdot r(x) \\ v'(1) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

但し、 $z = (v(x), c) \in (W_{\infty,0}^1(0,1) \cap W_{\infty}^2(0,1)) \times \mathbf{R}$ であり、 $p(x) \in W_{\infty}^1(0,1)$ 、 $q(x), r(x) \in L^{\infty}(0,1)$ とする。

定義 3 $\mathcal{L}$ が可逆であるとは「 $\mathcal{L}z = 0$ ならば $z = 0$ 」となることである。

定義 4 任意の $\phi \in H_0^1(0,1)$ に対して、 ϕ の H_0^1 -射影 ($P_h : H_0^1 \rightarrow S_h$) を次により定める。

$$((\phi - P_h \phi)', \varphi'_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in S_h.$$

定義 5 次の有限要素近似空間を定義する。

$$PL(0,1) \equiv \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}.$$

但し、基底 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ は次により定める。

$$\varphi_i \equiv \varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_{i-1} & \text{if } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ (x_{i+1} - x)/h_i & \text{if } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この中で示す数値的検証法の為に、以下を仮定する。

仮定 1 任意の $\phi \in W_{\infty,0}^1(0,1) \cap W_{\infty}^2(0,1)$ に対して、 h に依存しない正定数 C_0 により次が成り立つ。

$$\|(\phi - P_h \phi)'\|_{L^{\infty}} \leq C_0 h \|\phi''\|_{L^{\infty}}.$$

仮定 2 任意の $\phi \in W_{\infty,0}^1(0,1)$ に対して, h に依存しない正定数 C により次が成り立つ.

$$\|\phi - P_h\phi\|_{L^\infty} \leq Ch\|(\phi - P_h\phi)'\|_{L^\infty}.$$

仮定 3 任意の $\phi_h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \in S_h$ に対して $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N)^T$ とする. この時, 次を満たす行列 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{M \times N}$, $\text{rank}(\mathbf{P}) = N$ が存在する. ($M \geq N$)

$$\|\phi_h'\|_{L^\infty} = \|\mathbf{P}\vec{a}\|_\infty.$$

ここに, $\|\cdot\|_\infty$ は行列の最大値ノルムである.

仮定 4 任意の $\phi \in W_{\infty,0}^1(0,1)$ に対して, h に依存しない正定数 C_p により次が成り立つ.

$$\|P_h\phi\|_{W_{\infty,0}^1} \leq C_p\|\phi\|_{W_{\infty,0}^1}.$$

上記仮定において, $S_h = PL(0,1)$ とする時, 以下の結果を導く.

補題 2 [5] $S_h = PL(0,1)$ とする. この時, 任意の $\phi \in W_{\infty,0}^1(0,1)$ に対して $P_h\phi(x_i) = \phi(x_i)$, $0 \leq i \leq N+1$ となる.

補題 3 [5] $S_h = PL(0,1)$ とする. この時, 任意の $\phi \in W_{\infty,0}^1(0,1) \cap W_\infty^2(0,1)$ に対して次が成り立つ.

$$\|(\phi - P_h\phi)'\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2}h\|\phi''\|_{L^\infty}.$$

補題 4 $S_h = PL(0,1)$ とする. この時, 任意の $\phi \in W_{\infty,0}^1(0,1)$ に対して次が成り立つ.

$$\|\phi - P_h\phi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2}h\|(\phi - P_h\phi)'\|_{L^\infty}.$$

証明 : $e = \phi - P_h\phi$ とすると補題 2 により, $e(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, N+1$ である. この時, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N$ に対して

$$e(x) = \int_{x_i}^x e'(t)dt, \quad e(x) = - \int_x^{x_{i+1}} e'(t)dt$$

と書けるので, 両辺それぞれの絶対値を取ると次のようになる.

$$\begin{aligned} |e(x)| &= \left| \int_{x_i}^x e'(t)dt \right| \leq \int_{x_i}^x |e'(t)|dt, \\ |e(x)| &= \left| - \int_x^{x_{i+1}} e'(t)dt \right| \leq \int_x^{x_{i+1}} |e'(t)|dt. \end{aligned}$$

2つの式を足して, 次の不等式を得る.

$$2|e(x)| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |e'(t)|dt. \quad (3.2)$$

一方, $x^* \in [x_i, x_{i+1}]$ を次の様に決める.

$$|e(x^*)| \equiv \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |e(x)| = \|e\|_{L^\infty[x_i, x_{i+1}]}.$$

すると, (3.2) より

$$\begin{aligned}
2|e(x^*)| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |e'(t)| dt \\
&\leq \|e'\|_{L^\infty[x_i, x_{i+1}]} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dt \\
&= h_i \|e'\|_{L^\infty[x_i, x_{i+1}]}
\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\|e\|_{L^\infty} &= \max_{0 \leq i \leq N} \|e\|_{L^\infty[x_i, x_{i+1}]} \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq N} |e(x^*)| \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq i \leq N} h_i \|e'\|_{L^\infty[x_i, x_{i+1}]} \\
&= \frac{1}{2} h \|e'\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

となり, 結果を得る. ■

補題 5 $S_h = PL(0, 1)$ とする. この時, 任意の $\phi \in W_{\infty, 0}^1(0, 1)$ に対して次が成り立つ.

$$\|P_h \phi\|_{W_{\infty, 0}^1} \leq \|\phi\|_{W_{\infty, 0}^1}.$$

証明: $P_h \phi \in PL(0, 1)$ であるので, 補題 2 により $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N$ に対して $(P_h \phi)'(x) = (\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))/h_i$ となる. よって,

$$\begin{aligned}
|(P_h \phi)'(x)| &= \frac{1}{h_i} |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})| \\
&= \frac{1}{h_i} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'(x) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{h_i} \|\phi'\|_{L^\infty[x_i, x_{i+1}]} h_i \\
&\leq \|\phi\|_{W_{\infty, 0}^1}
\end{aligned}$$

から $\|P_h \phi\|_{W_{\infty, 0}^1} \leq \|\phi\|_{W_{\infty, 0}^1}$ を導く. ■

補題 6 $\psi \in W_{\infty, 0}^1(0, 1)$ とする. この時, 次が成り立つ.

$$\|\psi\|_{W_{\infty, 0}^1} \equiv \sup_{\xi \in L^1} \frac{(\psi', \xi)}{\|\xi\|_{L^1}} \leq \sup_{\zeta \in W_{1, 0}^1} \frac{2|(\psi', \zeta')|}{\|\zeta'\|_{L^1}}.$$

但し, $W_{1, 0}^1(0, 1) \equiv \{\zeta \in W_1^1(0, 1) : \zeta(0) = \zeta(1) = 0\}$ である.

証明: 任意の $\xi(x) \in L^1(0, 1)$ に対して

$$\zeta(x) \equiv \int_0^x \xi(t) dt - x \int_0^1 \xi(t) dt$$

とおくと, $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$ となることから $\zeta(x) \in W_{1,0}^1(0,1)$ となる. 今, $\psi \in W_{\infty,0}^1(0,1)$ であるので

$$\begin{aligned}
(\psi', \zeta') &= (\psi', \xi - \int_0^1 \xi(t) dt) \\
&= (\psi', \xi) - \int_0^1 \psi'(t) dt \cdot \int_0^1 \xi(t) dt \\
&= (\psi', \xi) - [\psi(1) - \psi(0)] \int_0^1 \xi(t) dt \\
&= (\psi', \xi)
\end{aligned}$$

を得る. 更に,

$$\begin{aligned}
\|\zeta'\|_{L^1} &\equiv \int_0^1 |\zeta'(x)| dx = \int_0^1 \left| \xi(x) - \int_0^1 \xi(t) dt \right| dx \\
&\leq \int_0^1 |\xi(x)| dx + \int_0^1 |\xi(t)| dt \\
&= 2\|\xi\|_{L^1}
\end{aligned}$$

であるので結果を導く. ■

本稿で示す手法は, 行列最大値ノルムから (3.1) の逆作用素を評価していくものであり,

$$M = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \\ & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{G} & \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T & \\ & \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

が重要な役割を果たすことになる. ここに, 行列 $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_{i,j})$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_j)$, $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{i,j})$ はそれぞれ次により定義される.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{i,j} &= (\varphi'_j, \varphi'_i) + (p \cdot \varphi'_j, \varphi_i) + (q \cdot \varphi_j, \varphi_i), \\
\mathbf{r}_i &= (r(x), \varphi_i), \\
\mathbf{v}_j &= \varphi'_j(1), \\
\mathbf{D}_{i,j} &= (\varphi'_j, \varphi'_i).
\end{aligned}$$

但し, $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ は S_h の基底である.

注意 2 $S_h = PL(0,1)$ とする. この時, 仮定 1, 2, 4 を満たす定数はそれぞれ $C_0 = C = 1/2$, $C_p = 1$ であり, 仮定 3 の行列は $\mathbf{P} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}$ となる. 但し,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & 1 & \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \text{diag}(h_1, \dots, h_N, h_0).$$

更に, $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{D} \mathbf{H}^{-1/2}$ となる.

特に, 一様分割 ($h = h_i, i = 0, \dots, N$) の時, 行列最大値ノルム M は次である.

$$M = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}h & \mathbf{r} \\ \mathbf{v}h & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \\ & 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty}.$$

■

さて, $z = (v, c) \in W \times \mathbf{R}$ に対し,

$$Az \equiv \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \cdot v' + q \cdot v + c \cdot r \\ c - v'(1) \end{pmatrix}$$

と定義する. この時, $\mathcal{L}$ の可逆性は不動点方程式 $z = Az$ が一意解 $z = 0$ を持つことと同値であることを用いて, 逆作用素 $(I - A)^{-1} : W^{\mathbf{R}} \rightarrow W^{\mathbf{R}}$ の存在性について次の結果を導く. 但し, I は $W^{\mathbf{R}}$ 上の恒等作用素である.

定理 1 線形作用素 (3.1) に対して,

$$C_0 h (C_3 M K + C_4) < 1$$

ならば, $\mathcal{L}$ は可逆である. 但し, $K = \max(2C_p(C_1 + C_2)h, 1)$ であり, 定数 C_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) は次により与えられる.

$$\begin{aligned} C_1 &= C(\|p\|_{L^\infty} + \|p'\|_{L^\infty}), & C_2 &= C\|q\|_{L^\infty}, \\ C_3 &= \|p\|_{L^\infty} + \|q\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty}, & C_4 &= \|p\|_{L^\infty} + Ch\|q\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

証明 : 不動点方程式 $z = Az$ において, 直積射影 $\mathcal{P}_h \equiv P_h \times 1 : W \times \mathbf{R} \rightarrow S_h \times \mathbf{R}$ により

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_h z &= \mathcal{P}_h Az, \\ (I - \mathcal{P}_h)z &= (I - \mathcal{P}_h)Az \end{aligned}$$

と分解する. ここで, 有限次元部分 $\mathcal{P}_h z = \mathcal{P}_h Az$ を Newton 型の反復によって

$$N_h z \equiv \mathcal{P}_h z - [I - A]_h^{-1} \mathcal{P}_h (I - A)z$$

と書き換え,

$$Tz \equiv N_h z + (I - \mathcal{P}_h)Az$$

により作用素 T を定める. 但し, 作用素 $[I - A]_h^{-1}$ は, $\mathcal{P}_h(I - A)|_{S_h \times \mathbf{R}} : S_h \times \mathbf{R} \rightarrow S_h \times \mathbf{R}$ の逆作用素である. そして, 候補者集合を次のように zero 中心の $W^{\mathbf{R}}$ -近傍を考える.

$$\begin{aligned} Z_h &= \left\{ z_h = (v_h, \hat{c}_h) \in S_h \times \mathbf{R} : \|z_h\|_{W_{\infty,0}^1} \leq \gamma \right\}, \\ Z_\perp &= \left\{ z_\perp = (v_\perp, 0) \in W \times \{0\} : \|z_\perp\|_{W_{\infty,0}^1} \leq \alpha, \quad \|z_\perp\|_{L^\infty} \leq Ch\alpha, \quad \mathcal{P}_h z_\perp = 0 \right\}, \\ Z &\equiv Z_h + Z_\perp. \end{aligned}$$

この時, 任意の $z \in Z$ は $z = z_h + z_\perp \in Z_h + Z_\perp$ と一意に分解できることから, $z = Az$ は $z = Tz$ と同値となる. よって, T は $W^{\mathbf{R}}$ からそれ自身へのコンパクト作用素であるので $TZ \subset Z$ が言えれば Schauder の不動点定理と T の線形性により $z = Az$ を満たす解は $z = 0$ と一意に決まる [2]. 但し, 集合の包含関係 $TZ \subset Z$ は TZ の閉包が Z の内包に含まれることを意味する.

そこで, $TZ \dot{\subset} Z$ の十分条件は,

$$\begin{aligned} N_h Z &\dot{\subset} Z_h \\ (I - \mathcal{P}_h)AZ &\dot{\subset} Z_\perp \end{aligned} \quad (3.3)$$

となり, 更に (3.3) の十分条件を考えると次を得る.

$$|||N_h Z|||_{W_{\infty,0}^1} \equiv \sup_{z \in Z} |||N_h z|||_{W_{\infty,0}^1} < \gamma, \quad (3.4)$$

$$|||(I - \mathcal{P}_h)AZ|||_{W_{\infty,0}^1} \equiv \sup_{z \in Z} |||(I - \mathcal{P}_h)Az|||_{W_{\infty,0}^1} < \alpha. \quad (3.5)$$

従って, (3.4)-(3.5) をそれぞれ評価していくことにする.

はじめに, $|||N_h Z|||_{W_{\infty,0}^1}$ を評価する.

任意の $z = z_h + z_\perp \in Z_h + Z_\perp$ に対して, $\psi_h := N_h z = N_h(z_h + z_\perp)$ とすると,

$$\begin{aligned} \psi_h &= N_h(z_h + z_\perp) \\ &= \mathcal{P}_h(z_h + z_\perp) - [I - A]_h^{-1} \mathcal{P}_h(I - A)(z_h + z_\perp) \\ &= z_h - [I - A]_h^{-1} \mathcal{P}_h(I - A)(z_h + z_\perp). \end{aligned}$$

となる. よって, これをまとめると次を得る.

$$\psi_h = [I - A]_h^{-1} \mathcal{P}_h A z_\perp.$$

今, $\mathcal{P}_h A z_\perp$ は $S_h \times \mathbf{R}$ の元であるので記号の簡略化のために $t_h := \mathcal{P}_h A z_\perp$ とする. そして, ψ_h と t_h のそれぞれの成分を $\psi_h = (\psi_{S_h}, \psi_{\mathbf{R}}) \in S_h \times \mathbf{R}$ と $t_h = (t_{S_h}, t_{\mathbf{R}}) \in S_h \times \mathbf{R}$ により表す. この時, 射影の定義より ψ_h は次の弱形式の解となる.

$$\begin{aligned} (\psi'_{S_h}, \varphi'_h) + (p \cdot \psi'_{S_h}, \varphi_h) + (q \cdot \psi_{S_h}, \varphi_h) + (\psi_{\mathbf{R}} \cdot r, \varphi_h) &= (t'_{S_h}, \varphi'_h), \\ \psi'_{S_h}(1) &= t_{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

そこで, ψ_{S_h}, t_{S_h} を, S_h の基底 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ を用いて,

$$\psi_{S_h} = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i, \quad t_{S_h} = \sum_{i=1}^N t_i \varphi_i$$

と表すと, 次の連立方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{r} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \psi_{\mathbf{R}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ t_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}.$$

但し, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_N)^T$, $\vec{t} = (t_1, \dots, t_N)^T$ はそれぞれ ψ_{S_h}, t_{S_h} の係数ベクトルである. ゆえに, $\|\psi_{S_h}\|_{W_{\infty,0}^1} = \|\mathbf{P}\vec{w}\|_\infty$ であることから

$$\begin{aligned} |||\psi_h|||_{W_{\infty,0}^1} &\equiv \max(\|\psi_{S_h}\|_{W_{\infty,0}^1}, |\psi_{\mathbf{R}}|) \\ &= \max(\|\mathbf{P}\vec{w}\|_\infty, |\psi_{\mathbf{R}}|) \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \psi_{\mathbf{R}} \end{pmatrix} \right\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{r} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ t_{\mathbf{R}} \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{r} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{P}^T \mathbf{P}) & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ t_{\mathbf{R}} \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\
&\leq \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{G} & \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{P} \vec{t} \\ t_{\mathbf{R}} \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\
&= M \cdot \max(\|\mathbf{P} \vec{t}\|_{\infty}, |t_{\mathbf{R}}|) \\
&= M \cdot \max(\|t_{S_h}\|_{W_{\infty,0}^1}, |t_{\mathbf{R}}|) \\
&= M \cdot \|t_h\|_{W_{\infty,0}^1}
\end{aligned}$$

を導くので, $z_{\perp} = (v_{\perp}, 0)$ として $t_h = \mathcal{P}_h A z_{\perp}$ を代入すると仮定 4 より次の評価式を得る.

$$\begin{aligned}
\|\psi_h\|_{W_{\infty,0}^1} &\leq M \|\mathcal{P}_h A z_{\perp}\|_{W_{\infty,0}^1} \\
&= M \cdot \max\left(\|P_h \Delta^{-1}(p \cdot v'_{\perp} + q \cdot v_{\perp})\|_{W_{\infty,0}^1}, |v'_{\perp}(1)|\right) \\
&\leq M \cdot \max\left(C_p \|\Delta^{-1}(p \cdot v'_{\perp} + q \cdot v_{\perp})\|_{W_{\infty,0}^1}, |v'_{\perp}(1)|\right).
\end{aligned}$$

よって, $|v'_{\perp}(1)| \leq \alpha$ であることから第 1 式 $\|\Delta^{-1}(p \cdot v'_{\perp})\|_{W_{\infty,0}^1}$ と第 2 式 $\|\Delta^{-1}(q \cdot v_{\perp})\|_{W_{\infty,0}^1}$ をそれぞれ次のように評価する.

第 1 式は, $\psi_1 = \Delta^{-1}(p \cdot v'_{\perp})$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$ とおくと $\psi_1'' = p \cdot v'_{\perp}$ を満たすことから補題 6 より次を導く.

$$\begin{aligned}
\|\psi_1\|_{W_{\infty,0}^1} &\equiv \sup_{\xi \in L^1} \frac{(\psi_1', \xi)}{\|\xi\|_{L^1}} \leq \sup_{\zeta \in W_{1,0}^1} \frac{2|(\psi_1', \zeta')|}{\|\zeta'\|_{L^1}} \\
&= \sup_{\zeta \in W_{1,0}^1} \frac{2|(\psi_1'', \zeta)|}{\|\zeta'\|_{L^1}} \\
&= \sup_{\zeta \in W_{1,0}^1} \frac{2|(p \cdot v'_{\perp}, \zeta)|}{\|\zeta'\|_{L^1}} \\
&= \sup_{\zeta \in W_{1,0}^1} \frac{2|(v_{\perp}, \operatorname{div}(p \cdot \zeta))|}{\|\zeta'\|_{L^1}} \\
&\leq \sup_{\zeta \in W_{1,0}^1} \frac{2\|v_{\perp}\|_{L^{\infty}}(\|p\|_{L^{\infty}} + \|p'\|_{L^{\infty}})\|\zeta'\|_{L^1}}{\|\zeta'\|_{L^1}}.
\end{aligned}$$

よって, 候補者集合の決め方により $\|v_{\perp}\|_{L^{\infty}} \leq Ch\alpha$ となるので次の評価を得る.

$$\|\psi_1\|_{W_{\infty,0}^1} \leq 2C(\|p\|_{L^{\infty}} + \|p'\|_{L^{\infty}})h\alpha = 2C_1 h\alpha.$$

第 2 式は, $\psi_2 = \Delta^{-1}q \cdot v_{\perp}$, $\psi_2(0) = \psi_2(1) = 0$ とおくと, 第 1 式と同様の議論により次の評価を得る.

$$\|\Delta^{-1}(q \cdot v_{\perp})\|_{W_{\infty,0}^1} \leq 2C\|q\|_{L^{\infty}}h\alpha = 2C_2 h\alpha.$$

従って, これらをまとめると (3.4) は次により与えられる.

$$\|N_h Z\|_{W_{\infty,0}^1} \leq M \cdot \max(2C_p(C_1 + C_2)h, 1)\alpha.$$

次に, $|||(I - \mathcal{P}_h)AZ|||_{W_{\infty,0}^1}$ を評価する.
 そこで, 任意の $z = z_h + z_\perp \in Z_h + Z_\perp$ に対して $z_h = (v_h, c_h)$, $z_\perp = (v_\perp, 0)$ と表す. この時,

$$\begin{aligned} |||(I - \mathcal{P}_h)AZ|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq C_0 h \sup_{z \in Z} \|p \cdot (v_h + v_\perp)' + q \cdot (v_h + v_\perp) + c_h \cdot r\|_{L^\infty} \\ &\leq C_0 h \sup_{z \in Z} (\|p \cdot v_h' + q \cdot v_h + c_h \cdot r\|_{L^\infty} + \|p \cdot v_\perp' + q \cdot v_\perp\|_{L^\infty}) \end{aligned}$$

となるので [5], この右辺の第 1 項と第 2 項について

$$\begin{aligned} \|p \cdot v_h' + q \cdot v_h + c_h \cdot r\|_{L^\infty} &\leq \|p\|_{L^\infty} \|v_h\|_{W_{\infty,0}^1} + \|q\|_{L^\infty} \|v_h\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty} |c_h| \\ &\leq \|p\|_{L^\infty} \|v_h\|_{W_{\infty,0}^1} + \|q\|_{L^\infty} \|v_h\|_{W_{\infty,0}^1} + \|r\|_{L^\infty} |c_h| \\ &\leq (\|p\|_{L^\infty} + \|q\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty}) \gamma = C_3 \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|p \cdot v_\perp' + q \cdot v_\perp\|_{L^\infty} &\leq \|p\|_{L^\infty} \|v_\perp\|_{W_{\infty,0}^1} + \|q\|_{L^\infty} \|v_\perp\|_{L^\infty} \\ &\leq \|p\|_{L^\infty} \|v_\perp\|_{W_{\infty,0}^1} + Ch \|q\|_{L^\infty} \|v_\perp\|_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq (\|p\|_{L^\infty} + Ch \|q\|_{L^\infty}) \alpha = C_4 \alpha \end{aligned}$$

と評価すると, (3.5) は次により評価される.

$$|||(I - \mathcal{P}_h)AZ|||_{W_{\infty,0}^1} \leq C_0 h (C_3 \gamma + C_4 \alpha).$$

以上により, 検証条件 (3.4)-(3.5) の右辺の評価ができたので, 検証条件 $(TZ \dot{\subset} Z)$ は以下のように書き換えられる.

$$M \cdot \max(2C_p(C_1 + C_2)h, 1) \alpha < \gamma, \quad (3.6)$$

$$C_0 h (C_3 \gamma + C_4 \alpha) < \alpha. \quad (3.7)$$

すなわち, (3.6)-(3.7) を満たす γ と α が存在すれば (3.1) の線形作用素 $\mathcal{L}$ の可逆性が言えることになるのである.

そこで $K = \max(2C_p(C_1 + C_2)h, 1)$ として, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\gamma = MK\alpha + \varepsilon$ とすると, (3.6) は自明であり, これを (3.7) に代入すると,

$$C_0 h (C_3 (MK\alpha + \varepsilon) + C_4 \alpha) < \alpha$$

であるので, この式を満たす α が決定できる為には,

$$1 - C_0 h (C_3 MK + C_4) > 0$$

を満足すればよい. したがって定理は証明された. ■

3.1 逆作用素のノルム評価

定理 1 が満たされる時, 逆作用素 $(I - A)^{-1}$ の評価について次の結果を導く.

定理 2 定理 1 と同じ記号の下で, $\kappa \equiv C_0 h (C_3 MK + C_4) < 1$ ならば,

$$|||(I - A)^{-1}|||_{W_{\infty,0}^1} \leq (R + S) =: \mathcal{M}$$

である. 但し, R, S はそれぞれ次により与えられる.

$$R = (C_0 C_3 C_p h M + 1 + C_p) / (1 - \kappa), \quad S = (KR + C_p) M.$$

証明： 初めに, 任意の $(g, s) \in L^\infty(0, 1) \times \mathbf{R}$ に対して

$$\psi := (-\Delta^{-1}g, s) \in \left(W_{\infty,0}^1(0, 1) \cap W_{\infty}^2(0, 1)\right) \times \mathbf{R} \quad (3.8)$$

とし, 条件より $(I - A)$ は可逆であることから $(I - A)z = \psi$ を満たす $z \in W^{\mathbf{R}}$ が唯一つ存在する. そこで, $N_h z, Tz$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} N_h z &= \mathcal{P}_h z - [I - A]_h^{-1} \mathcal{P}_h((I - A)z - \psi), \\ Tz &= N_h z + (I - \mathcal{P}_h)(Az + \psi). \end{aligned}$$

このとき $(I - A)z = \psi$ は, $Tz = z$ と不動点定式化できるので $z = z_h + z_\perp$ ($z_h := \mathcal{P}_h z, z_\perp := z - \mathcal{P}_h z$) に対して

$$\begin{aligned} z_h &= [I - A]_h^{-1} (\mathcal{P}_h A z_\perp - \mathcal{P}_h \psi), \\ z_\perp &= (I - \mathcal{P}_h) A (z_h + z_\perp) + (I - \mathcal{P}_h) \psi \end{aligned} \quad (3.9)$$

と書ける. よって (3.9) より次が導ける.

$$\begin{aligned} |||z_h|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq M |||\mathcal{P}_h A z_\perp - \mathcal{P}_h \psi|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq MK |||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1} + M |||\mathcal{P}_h \psi|||_{W_{\infty,0}^1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} |||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq |||(I - \mathcal{P}_h) A (z_h + z_\perp)|||_{W_{\infty,0}^1} + |||(I - \mathcal{P}_h) \psi|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq C_0 h (C_3 |||z_h|||_{W_{\infty,0}^1} + C_4 |||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1}) + |||(I - \mathcal{P}_h) \psi|||_{W_{\infty,0}^1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

そこで, (3.10) 式の $|||z_h|||_{W_{\infty,0}^1}$ を (3.11) に代入して, $|||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1}$ について解くと仮定 4 より

$$\begin{aligned} |||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq \left[C_0 C_3 h M |||\mathcal{P}_h \psi|||_{W_{\infty,0}^1} + |||(I - \mathcal{P}_h) \psi|||_{W_{\infty,0}^1} \right] / (1 - \kappa) \\ &\leq \left[C_0 C_3 C_p h M |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + (1 + C_p) |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} \right] / (1 - \kappa) \\ &= [(C_0 C_3 C_p h M + 1 + C_p) / (1 - \kappa)] |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &= R |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる. また, 左辺の $|||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1}$ を (3.10) 式に代入して仮定 4 より次式を得る.

$$\begin{aligned} |||z_h|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq MKR |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + M |||\mathcal{P}_h \psi|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq (KR + C_p) M |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &= S |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

故に (3.12), (3.13) より

$$\begin{aligned} |||z|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq |||z_h|||_{W_{\infty,0}^1} + |||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq (R + S) |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

が導かれ, $(I - A)z = \psi$ であることから結果を導く. ■

次の結果は, 線型方程式 $\mathcal{L}z = g$ の a priori 評価を与えるものである.

定理 3 任意の $(g, s) \in L^\infty(0, 1) \times \mathbf{R}$ に対して, $z = (v, c) \in (W_{\infty,0}^1(0, 1) \cap W_\infty^2(0, 1)) \times \mathbf{R}$ を $\mathcal{L}z = (g, s)$ の解とする. この時, 線形作用素 $\mathcal{L}$ が可逆ならば次が成り立つ.

$$|||z|||_{W_{\infty,0}^1} \leq |||(I - A)^{-1}|||_{W_{\infty,0}^1} \cdot \max\left(\frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty}, |s|\right).$$

証明 : 定理 2 の証明の (3.8) と (3.14) より, この定理の証明は

$$|||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} = \max(||-\Delta^{-1}g||_{W_{\infty,0}^1}, |s|)$$

を評価することに帰着される. すなわち, $\phi = \Delta^{-1}g$, $\phi(0) = \phi(1) = 0$ とした時に $\|\phi'\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty}$ を証明すればよい. この時, $\phi'' = g$ となることから $\phi'(x) = \int_0^x g(t) dt + \tau_1$, 更に $\phi(x) = \int_0^x \int_0^t g(\xi) d\xi dt + \tau_1 x + \tau_2$ と表す. 但し, τ_1, τ_2 は定数である. しかしながら, $\phi(0) = \phi(1) = 0$ より $\tau_1 = -\int_0^1 \int_0^t g(\xi) d\xi dt$, $\tau_2 = 0$ である. よって,

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \int_0^x g(t) dt - \int_0^1 \int_0^t g(\xi) d\xi dt \\ &= \int_0^x g(t) dt - \left[t \int_0^t g(\xi) d\xi \right]_0^1 + \int_0^1 t g(t) dt \\ &= \int_0^x g(t) dt - \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 t g(t) dt \\ &= \int_0^x t g(t) dt - \int_x^1 (1-t) g(t) dt \end{aligned}$$

を導く. 従って,

$$\begin{aligned} |\phi'(x)| &\leq \|g\|_{L^\infty} \left[\int_0^x t dt + \int_x^1 (1-t) dt \right] \\ &= \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) \|g\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{1}{2} \|g\|_{L^\infty} \end{aligned} \tag{3.15}$$

となり, 定理は証明された. ■

3.2 直接的 a priori 評価

定理 3 の a priori 評価において, $|||(I - A)^{-1}|||_{W_{\infty,0}^1}$ を用いず, 以下の様な形で与えることが, 一般には自由境界問題 (1.1) の解を検証する為には効率的である.

定理 4 任意の $(g, s) \in L^\infty(0, 1) \times \mathbf{R}$ に対して, $z = (v, c) \in (W_{\infty,0}^1(0, 1) \cap W_\infty^2(0, 1)) \times \mathbf{R}$ を $\mathcal{L}z = (g, s)$ の解とする. この時, 定理 1 と同じ記号の下で, $\kappa \equiv C_0 h (C_3 M K + C_4) < 1$ ならば,

$$|||z|||_{W_{\infty,0}^1} \leq \mathcal{M}_1 \cdot \max\left(\frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty}, |s|\right) + \mathcal{M}_2 \|g\|_{L^\infty}$$

である. 但し, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ はそれぞれ次により与えられる.

$$\mathcal{M}_1 = C_p M [\mathcal{M}_2 C_3 + 1], \quad \mathcal{M}_2 = S_0 [M K + 1], \quad S_0 = C_0 h / (1 - \kappa).$$

証明： 定理2 の証明の (3.10), (3.11) を次のように評価することにより, 結果を導く.

はじめに, (3.11) は仮定 1 と仮定 4 により

$$\begin{aligned} |||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq \left[C_0 C_3 h M |||\mathcal{P}_h \psi|||_{W_{\infty,0}^1} + |||(I - \mathcal{P}_h)\psi|||_{W_{\infty,0}^1} \right] / (1 - \kappa) \\ &\leq \left[C_0 C_3 C_p h M |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + C_0 h \|g\|_{L^\infty} \right] / (1 - \kappa) \\ &= S_0 C_3 C_p M |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + S_0 \|g\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

となる. また, 左辺の $|||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1}$ を (3.10) 式に代入して仮定 4 より次式を得る.

$$\begin{aligned} |||z_h|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq M K S_0 \left[C_3 C_p M |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + \|g\|_{L^\infty} \right] + M |||\mathcal{P}_h \psi|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq M K S_0 \left[C_3 C_p M |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + \|g\|_{L^\infty} \right] + C_p M |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq C_p M [M K S_0 C_3 + 1] |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + M K S_0 \|g\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

ゆえに, (3.15) により

$$\begin{aligned} |||z|||_{W_{\infty,0}^1} &\leq |||z_h|||_{W_{\infty,0}^1} + |||z_\perp|||_{W_{\infty,0}^1} \\ &\leq C_p M [\mathcal{M}_2 C_3 + 1] |||\psi|||_{W_{\infty,0}^1} + S_0 [M K + 1] \|g\|_{L^\infty} \\ &\leq \mathcal{M}_1 \cdot \max \left(\frac{1}{2} \|g\|_{L^\infty}, |s| \right) + \mathcal{M}_2 \|g\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

であることから結果を導く. ■

4 Numerical Examples

この章では, 以下に示す例に対して数値的検証アルゴリズムの検証結果を紹介していく. そこで, 候補者集合を $Y \equiv \{\mathbf{w} = (w, d) \in W^{\mathbf{R}} : |||\mathbf{w}|||_{W_{\infty,0}^1} \leq \alpha\}$, $S_h = PL(0.1)$ により定める. また, 2 章で述べたように本論文では誤差の検証であり, 近似解との誤差は $(\|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + \|w\|_{W_{\infty,0}^1}, |d|)$ となる.

例 1 [6] ロープのたわみ問題 :

$$\begin{aligned} u''(x) &= \rho \sqrt{1 + (u'(x))^2} \quad \text{if } x \in (0, c), \\ u(x) &> 0 \quad \text{if } x \in [0, c), \\ u(x) &= 0 \quad \text{if } x \in [c, \infty), \\ u(0) &= u_0, \quad u'(c) = 0 \end{aligned}$$

について考える. 但し, $\rho > 0$ はパラメータであり, ここでは $\rho = 1$, $u_0 = 0.1$ とする.

例 1 は, Schäfer により [4] で紹介された問題である. すなわち, 例 1 は大域的な解の一意存在性が判明して, $u_0 = 0.1$ の場合 $c = 0.44356825 \dots$ となる.

2-3 章の議論を具体的に計算すると, 検証条件 (2.8) は次の 2 次不等式を満たす α を求めることに帰着される.

$$K_2 \alpha^2 + K_1 \alpha + K_0 < \alpha.$$

但し, $K_i, 0 \leq i \leq 2$ は定数であり, 例えば次のように与えられる. (付録 6.1 節参照)

$$\begin{aligned} K_2 &= 6 \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \right), \\ K_1 &= 4 \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \right) \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}, \\ K_0 &= \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \right) \left(\|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}^2 + \min(\|\hat{v}_h' - u_0\|_{L^\infty}, |\hat{c}_h|) \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} \right) \\ &\quad + \mathcal{M}_1 (|u_0 - \hat{v}_h'(1)| + \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}). \end{aligned}$$

この場合における数値的検証結果を表 1 に示す. また, $u(x) > 0, x \in [0, c)$ の条件は右辺 $\rho\sqrt{1 + (u'(x))^2} > 0$ より, 検証条件を満たす任意の解に対して満足される.

表 1: Numerical Result for Example 1 ($c = 0.44356825 \dots$)

$1/h$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\ v_0\ _{W_{\infty,0}^1}$	range of α for existence	$\hat{c}_h$
100	23.1535	7.0462	4.0268e-2	1.0920e-3	[0.0114928, 0.0345511]	0.4458024
200	22.7137	6.9021	1.9764e-2	5.4353e-4	[0.0046142, 0.0430425]	0.4446812
300	22.5746	6.8566	1.3098e-2	3.6180e-4	[0.0029257, 0.0452628]	0.4443093
400	22.5224	6.8396	9.8017e-3	2.7115e-4	[0.0021470, 0.0462685]	0.4441237

例 1 に対して, Schäfer の結果は $h = 1/300$ の時, $c \in [0.4412705, 0.4472135]$ であることから本論文の数値的検証アルゴリズムがより有効であると言える.

例 2

$$\begin{aligned} -u''(x) &= u(x) - 2 - \frac{1}{4} (u'(x))^2 \quad \text{if } x \in (0, c), \\ u(x) &> 0 \quad \text{if } x \in [0, c), \\ u(x) &= 0 \quad \text{if } x \in [c, \infty), \\ u(0) &= u_0, \quad u'(c) = 0 \end{aligned}$$

について考える. 但し, $u_0 = 1/2, 1/4, 1/9$ とする.

この時, 例 2 の解は $u(x) = (x - \sqrt{u_0})^2, c = \sqrt{u_0}$ となる. 2-3 章の議論を具体的に計算すると, 検証条件 (2.8) は次の 3 次不等式を満たす α を求めることに帰着される.

$$T_3 \alpha^3 + T_2 \alpha^2 + T_1 \alpha + T_0 < \alpha.$$

但し, $T_i, 0 \leq i \leq 3$ は定数であり, 例えば次のように与えられる. (付録 6.2 節参照)

$$\begin{aligned} T_3 &= \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \right), \\ T_2 &= \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \right) \left[\|\hat{v}_h + (1-x)u_0 - 2\|_{L^\infty} + Ch \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + 2|\hat{c}_h| + 1 \right], \\ T_1 &= \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \right) \left[2Ch |\hat{c}_h| \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + \frac{1}{2} \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} \right], \\ T_0 &= \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \right) \left[Ch |\hat{c}_h|^2 \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + \frac{1}{2} \|\hat{v}_h' - u_0\|_{L^\infty} \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + \frac{1}{4} \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}^2 \right] \\ &\quad + \mathcal{M}_1 (|u_0 - \hat{v}_h'(1)| + \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}). \end{aligned}$$

この場合における数値的検証結果を表 2-4 に示す. また, $u(x) > 0$, $x \in [0, c]$ の条件は例 2 を満たす任意の解に対しては言えないが, 表 2-4 により保証された解に対しては $u(x) - 2 < 0$ となり $u(x) > 0$ は満足される.

表 2: Numerical Result for Example 2 for $u_0 = 1/2$ ($c = 0.70710678 \dots$)

$1/h$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\ v_0\ _{W_{\infty,0}^1}$	range of α for existence	$\hat{c}_h$
100	18.6727	5.5465	3.2815e-2	5.0631e-3	Fail	0.7106674
200	17.7984	5.2609	1.5671e-2	2.5157e-3	[0.0227080, 0.0612693]	0.7088808
300	17.5243	5.1713	1.0294e-2	1.6736e-3	[0.0127211, 0.0728611]	0.7082880
400	17.3905	5.1276	7.6643e-3	1.2539e-3	[0.0089764, 0.0774086]	0.7079922

表 3: Numerical Result for Example 2 for $u_0 = 1/4$ ($c = 0.5$)

$1/h$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\ v_0\ _{W_{\infty,0}^1}$	range of α for existence	$\hat{c}_h$
100	17.9558	5.3133	3.1606e-2	2.5284e-3	[0.0191939, 0.0716473]	0.5025183
200	17.4655	5.1525	1.5391e-2	1.2570e-3	[0.0079673, 0.0862318]	0.5012545
300	17.3077	5.1008	1.0172e-2	8.3646e-4	[0.0050757, 0.0902568]	0.5008353
400	17.2298	5.0753	7.5965e-3	6.2676e-4	[0.0037295, 0.0921743]	0.5006261

表 4: Numerical Result for Example 2 for $u_0 = 1/9$ ($c = 0.33333333 \dots$)

$1/h$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\ v_0\ _{W_{\infty,0}^1}$	range of α for existence	$\hat{c}_h$
100	17.4811	5.1581	3.0807e-2	1.1229e-3	[0.0065406, 0.0950616]	0.3350124
200	17.2377	5.0781	1.5199e-2	5.5850e-4	[0.0030907, 0.1007067]	0.3341697
300	17.1581	5.0519	1.0088e-2	3.7167e-4	[0.0020249, 0.1025108]	0.3338902
400	17.1186	5.0389	7.5497e-3	2.7851e-4	[0.0015045, 0.1033958]	0.3337507

以上の数値結果は, 区分一次多項式を基底関数とした一様分割の有限要素法を使用して MATLAB 6.5 とこの下で動作する INTLAB [3] により得られたものであり, 使用した計算機は Dell Latitude C400 (Note Type PC) Intel Pentium Mobile CPU 866MHz (128MB) である. 以下に, 例 1-2 の近似解の形状を示しておく.

5 まとめ

数値結果から, 本論文で提案した逆作用素のノルム評価を利用した数値的検証法は, 実用的な自由境界問題に対しても比較的小規模の計算機で十分対応することが分かった. 本論文では, 解の導関数の自由境界における値を確定する必要性と, 区分 1 次多項式による近似を用いた検証を定式化するため, やや特殊な関数空間を設定した. もし滑らかな近似空間を用いるならば, $C^1(0, 1)$ を基礎の関数空間として定式化することが可能であろう.

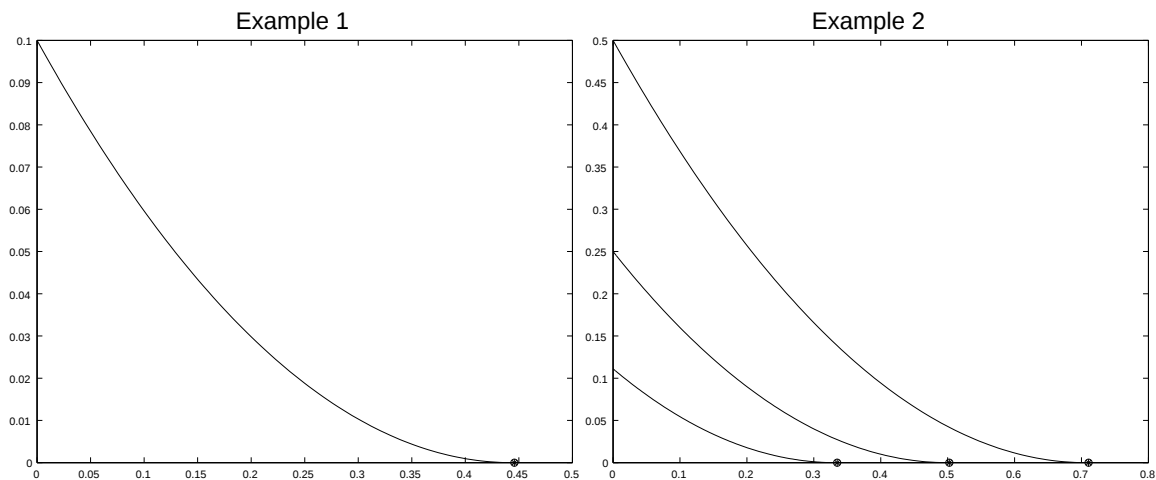


図 1: 例 1-2 の近似解の形状

参考文献

- [1] L. Collatz, Differentialgleichungen, Teubner, (1981).
- [2] Nakao, M.T., A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan Journal of Applied Mathematics 5 (1988), 313–332.
- [3] Rump S. M., INTLAB-INTERVAL LABORATORY, a Matlab toolbox for verified computations, version 4.1.2. Inst. Infomatik, Technical University Hamburg Harburg, (2002). <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/index.html/>
- [4] U. Schäfer, An enclosure method for free boundary problems based on a linear complementarity problem with interval data, Numer. Funct. Anal. Optim. 22 (2001), no. 7-8, 991–1011.
- [5] M. H. Schultz, Spline Analysis, Prentice-Hall, London, (1973).
- [6] R. C. Thompson, A note on monotonicity properties of a free boundary problem for an ordinary differential equation, Rocky Mountain J. Math. 12 (1982), no. 4, 735–739.
- [7] 橋本弘治, 渡部善隆, 中尾充宏, 線形楕円型作用素の可逆性の数値的検証とその非線形問題への応用, 日本応用数理学会年会, 京都大学, 2003 年 9 月, p.100-101.

6 付録

本文中で示した例に対して, 具体的な計算・評価について紹介する. 以下, $\hat{u}_h = \hat{v}_h + (1-x)u_0$ とする.

6.1

例 1 に対応するものとして, $f(v, c) = c(c^2 + (v')^2)^{\frac{1}{2}}$ について考えていく. この時, Fréchet 微分は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial v} f(v, c)w = \frac{cv'w'}{[c^2 + (v')^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial}{\partial c} f(v, c)d = \frac{[2c^2 + (v')^2]d}{[c^2 + (v')^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

よって, $w_0 = w + v_0$ として Taylor 展開により

$$\begin{aligned} & f(\hat{u}_h + w_0, \hat{c}_h + d) - f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) - \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h)w - \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h)d \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h + \theta w_0, \hat{c}_h + \theta d)w_0 - \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h)w \right] + \left[\frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h + \theta w_0, \hat{c}_h + \theta d)d - \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h)d \right] \end{aligned}$$

となることを用いて, この第 1, 2 項をそれぞれ次のように評価していく. 但し, $\theta \in (0, 1)$ である.

はじめに, 第 1 項は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h + \theta w_0, \hat{c}_h + \theta d)w_0 - \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h)w \\ &= \frac{(\hat{c}_h + \theta d)(\hat{u}'_h + \theta w'_0)w'_0}{[(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\hat{c}_h \hat{u}'_h w'}{[\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left[\frac{(\hat{c}_h + \theta d)(\hat{u}'_h + \theta w'_0)}{[(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\hat{c}_h \hat{u}'_h}{[\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] w'_0 + \frac{\hat{c}_h \hat{u}'_h v'_0}{[\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

となり, 更に Taylor 展開により

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\hat{c}_h + \theta d)(\hat{u}'_h + \theta w'_0)}{[(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\hat{c}_h \hat{u}'_h}{[\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| \\ &= \left| \frac{(\hat{c}_h + \tau d)\theta w'_0 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)\theta d}{[(\hat{c}_h + \tau d)^2 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\hat{c}_h + \tau d)(\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2 \theta w'_0 + (\hat{c}_h + \tau d)^2 (\hat{u}'_h + \tau w'_0) \theta d}{[(\hat{c}_h + \tau d)^2 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= \left| \frac{(\hat{c}_h + \tau d)^3 \theta w'_0 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^3 \theta d}{[(\hat{c}_h + \tau d)^2 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &\leq |\theta w'_0| + |\theta d| \end{aligned}$$

と評価できることから次の不等式を得る. 但し, $\tau \in (0, 1)$ である.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h + \theta w_0, \hat{c}_h + \theta d)w_0 - \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h)w \right| &\leq (|w'| + |v'_0|)^2 + |d|(|w'| + |v'_0|) \\ &\quad + \min(\|\hat{u}'_h\|_{L^\infty}, |\hat{c}_h|)|v'_0|. \quad (6.16) \end{aligned}$$

次に, 第 2 項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h + \theta w_0, \hat{c}_h + \theta d)d - \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h)d &= \frac{[2(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]d}{[(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{[2\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]d}{[\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= d \left[\frac{[2(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]}{[(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{[2\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]}{[\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned}$$

であるので第 1 項と同様に Taylor 展開により

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{[2(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]}{[(\hat{c}_h + \theta d)^2 + (\hat{u}'_h + \theta w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{[2\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]}{[\hat{c}_h^2 + (\hat{u}'_h)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| \\
&= \left| \frac{2(\hat{u}'_h + \tau w'_0)\theta w'_0 + 4(\hat{c}_h + \tau d)\theta d}{[(\hat{c}_h + \tau d)^2 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{[2(\hat{c}_h + \tau d)^2 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2][(\hat{u}'_h + \tau w'_0)\theta w'_0 + (\hat{c}_h + \tau d)\theta d]}{[(\hat{c}_h + \tau d)^2 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&= \left| \frac{(\hat{u}'_h + \tau w'_0)^3\theta w'_0 + 2(\hat{c}_h + \tau d)^3\theta d + 3(\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2(\hat{c}_h + \tau d)\theta d}{[(\hat{c}_h + \tau d)^2 + (\hat{u}'_h + \tau w'_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq |\theta w'_0| + 3|\theta d|
\end{aligned}$$

と評価されることから次の不等式を得る.

$$\left| \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h + \theta w_0, \hat{c}_h + \theta d) d - \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) d \right| \leq |d|(|w'| + |v'_0|) + 3|d|^2. \quad (6.17)$$

従って, (6.16)-(6.17) により次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \left| f(\hat{u}_h + w_0, \hat{c}_h + d) - f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) - \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) w - \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) d \right| \\
&\leq (|w'| + |v'_0|)^2 + |d|(|w'| + |v'_0|) + \min(|\hat{u}'_h|_{L^\infty}, |\hat{c}_h|) |v'_0| + |d|(|w'| + |v'_0|) + 3|d|^2 \\
&\leq 6\alpha^2 + 4\|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} \alpha + \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}^2 + \min(\|\hat{u}'_h\|_{L^\infty}, |\hat{c}_h|) \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}.
\end{aligned}$$

6.2

例 2 に対応するものとして, $f(v, c) = c^2(v - 2) - \frac{1}{4}(v')^2$ について考えていく. この時, Fréchet 微分は

$$\frac{\partial}{\partial v} f(v, c) w = c^2 w - \frac{1}{2} v' w', \quad \frac{\partial}{\partial c} f(v, c) d = 2cd(v - 2)$$

となることから, 次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \left\| f(\hat{u}_h + w + v_0, \hat{c}_h + d) - f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) - \frac{\partial}{\partial v} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) w - \frac{\partial}{\partial c} f(\hat{u}_h, \hat{c}_h) d \right\|_{L^\infty} \\
&= \left\| d^2 w + d^2(\hat{u}_h + v_0 - 2) + 2dw\hat{c}_h - \frac{1}{4}(w')^2 + 2d\hat{c}_h v_0 - \frac{1}{2}w'v'_0 + \hat{c}_h^2 v_0 - \frac{1}{2}\hat{u}'_h v'_0 - \frac{1}{4}(v'_0)^2 \right\|_{L^\infty} \\
&\leq \alpha^3 + \left(\|\hat{u}_h - 2\|_{L^\infty} + Ch\|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + 2|\hat{c}_h| + 1 \right) \alpha^2 + \left(2Ch|\hat{c}_h| \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + \frac{1}{2}\|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} \right) \alpha \\
&\quad + Ch|\hat{c}_h|^2 \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + \frac{1}{2}\|\hat{u}'_h\|_{L^\infty} \|v_0\|_{W_{\infty,0}^1} + \frac{1}{4}\|v_0\|_{W_{\infty,0}^1}^2
\end{aligned}$$